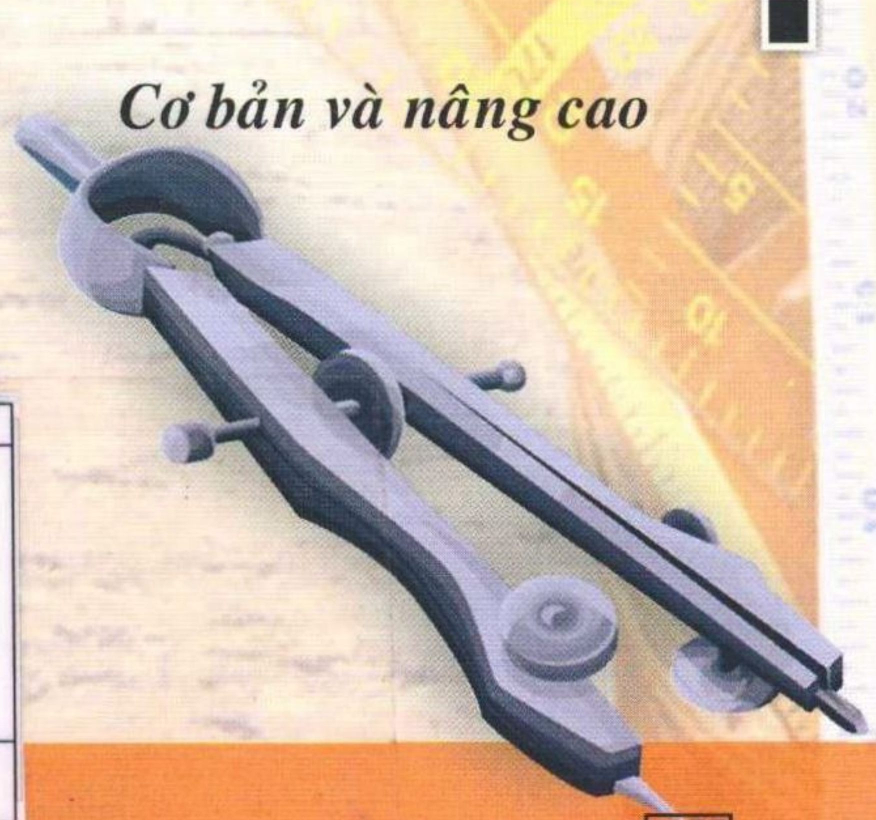
giải các dạng toán
điển hình,chuẩn bị
cho các kì thi
Quốc gia
do Bộ GD&ĐT
tổ chức

PHÂN DẠNG & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Hình học 12

Cơ bản và nâng cao



HQGHN
076
A
8
068

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN THỊ VÂN ANH - LÂM THỊ HỒNG LIÊN

PHÂN DẠNG & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Hình học 12

Cơ bản và nâng cao

- Biên soạn theo chương trình và SGK mới
- Rèn kĩ năng giải các dạng toán điển hình, chuẩn bị cho các kì thi Quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI GIỚI THIỆU

Bạn đọc đang có trong tay cuốn "*Phân dạng & Phương pháp giải Toán Hình học 12*". Đây là cuốn sách nằm trong bộ sách 3 cuốn: *Phân dạng & Phương pháp giải toán Giải tích 12 (tập 1), Phân dạng & Phương pháp giải toán Giải tích 12 (tập 2), Phân dạng & Phương pháp giải Toán Hình học 12* của nhóm tác giả: Trần Thị Vân Anh - Lâm Hồng Liên. Bộ sách được biên soạn trên nội dung chương trình và sách giáo khoa phân ban mới của Bộ GD&ĐT. Với gần 30 năm trực tiếp đứng lớp và bồi dưỡng luyện thi... Các tác giả đã đúc kết và trình bày khá rõ ràng các dạng toán và phương pháp giải điển hình cho từng vấn đề được đề cập trong sách cơ bản và nâng cao mới.

Quyển sách được trình bày thành bốn chương:

Chương I: Khối đa diện và thể tích của chúng.

Chương II: Mặt cầu,mặt trụ ,mặt nón.

Chương III: Phương pháp tọa độ trong không gian.

Chương IV: Ôn tập cuối năm

Mỗi chương đều được thiết kế thành nhiều phần nhỏ tương ứng với các tiết phân phối trong chương trình của Sách giáo khoa *Hình học 12 – Nâng cao*. Trong mỗi phần, sách được cấu trúc gồm 4 nội dung chính như sau:

1. Kiến thức cơ bản
2. Các dạng bài tập cơ bản
3. Bài tập vận dụng, bao gồm bài tập tự luận, câu hỏi và bài tập trắc nghiệm.
4. Hướng dẫn và đáp số

Phần tóm tắt lí thuyết trong quyển sách này được trình bày ngắn gọn nhưng khá đầy đủ. Với mỗi dạng bài tập cơ bản đều có phương pháp giải cụ thể và ví dụ minh họa. Ngoài ra, các bài tập đều có hướng dẫn giải chi tiết, dễ hiểu. Nhiều ví dụ có lời nhận xét để giúp học sinh tránh các sai lầm cơ bản. Các bài tập được lựa chọn từ dễ đến khó. Một số bài tập tự luận được trích từ các đề thi tốt nghiệp và đại học những năm gần đây. Chúng tôi hi vọng rằng quyển sách này sẽ giúp ích cho các bạn trong quá trình học tập, rèn kĩ năng giải

Bộ GD&ĐT tổ chức sắp đến... Chúc các em học sinh và các thầy cô giáo quan tâm đến quyển sách này thành công trên mọi lĩnh vực .

Mặc dù các tác giả đã có rất nhiều cố gắng, song không tránh khỏi sai sót. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các em học sinh và các thầy cô giáo.

Mọi góp ý xin gửi về: * Trung tâm sách giáo dục ANPHA

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5. Tp.HCM ĐT: 0903.701.650

* Công ti sách thiết bị Giáo Dục AnPha

50 Nguyễn Văn Săng, P. Tân Sơn Nhì, Q. Tân Phú

ĐT: 2676463 8107718

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin trân trọng cảm ơn!

Các tác giả.

Chương I.

KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khối đa diện, khối chóp, khối lăng trụ

- Xét mỗi hình ***H*** có hai đặc điểm:

  a. Mỗi hình ***H*** gồm một số hữu hạn đa giác phẳng.

  b. Mỗi hình ***H*** phân chia không gian thành hai phần: *phần bên trong* và *phần bên ngoài* của hình đó.

Mỗi điểm thuộc phần bên trong được gọi là *điểm nằm trong* ***H***.

Hình H cùng với các điểm nằm trong H được gọi là khối đa diện giới hạn bởi hình H.

- Mỗi đa giác của hình H được gọi là một *mặt* của khối đa diện. Các đỉnh, các cạnh của các mặt như thế gọi là *đỉnh*, *cạnh* của khối đa diện. Các điểm nằn trong hình ***H*** còn gọi là *điểm trong* của khối đa diện.
- Khối đa diện được gọi là *khối chóp* nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp.
- Khối đa diện được gọi là *khối lăng trụ* nếu nó được giới hạn bởi một hình lăng trụ.
- Ta chỉ xét các khối đa diện giới hạn bởi hình gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thỏa mãn hai điều kiện:

  - Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

  - Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Hình H gồm các đa giác đó được gọi là một hình đa diện, hoặc đơn giản là đa diện.

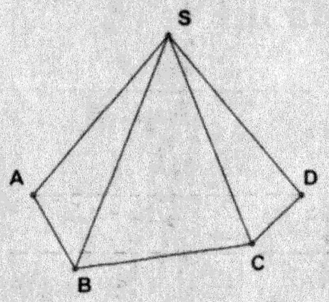
2. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện

- Mọi khối chóp và khối lăng trụ luôn có thể phân chia thành các khối tứ diện (bằng nhiều cách khác nhau). Điều đó cũng đúng cho khối đa diện bất kì.

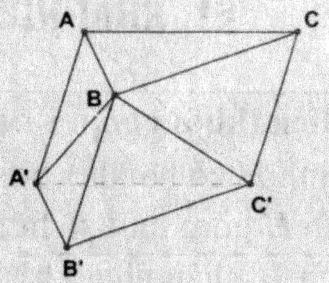
Ví dụ:

Khối đa diện S.ABCD được phân chia thành hai khối đa diện S.ABC và S.ACD (hình 1).

Khối lăng trụ ABC.A'B'C' được phân chia thành ba khối tứ diện B.A'B'C'; B.AA'C' và B.ACC' (hình 2).



Hình 1



Hình 2

Bài tập

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
Số các đỉnh hoặc số các mặt của bất kì khối đa diện nào cũng:
A. Lớn hơn 4 B. Lớn hơn hoặc bằng 4
C. Lớn hơn 5 D. Lớn hơn hoặc bằng 5.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
Số cạnh của khối đa diện luôn
A. Lớn hơn hoặc bằng 6 B. Lớn hơn 6
C. Lớn hơn hoặc bằng 7 D. Lớn hơn hoặc bằng 8.

3. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là các tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra một số các khối đa diện có các mặt là tam giác.

4. Chứng minh rằng nếu khối đa diện mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

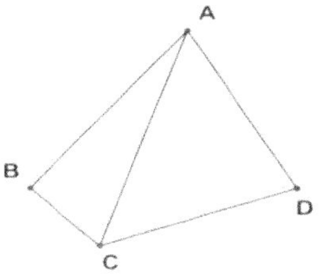
5. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện.

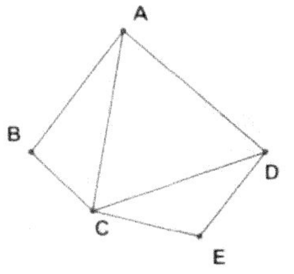
Hướng dẫn

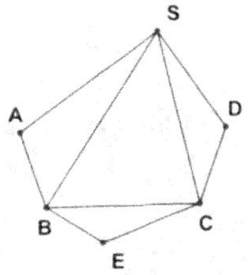
1. Câu B đúng.

2. Câu A đúng.

3. Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số mặt là M.
Vì mỗi mặt có 3 cạnh và mỗi cạnh lại chung cho 2 mặt nên:
$3M = 2C$. Suy ra M là số chẵn.
Một số khối đa diện có các mặt là tam giác:







4. Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số đỉnh là D.
Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh có hai đỉnh nên 3D = 2C. Vậy D phải là số chẵn.
5. Gọi A là một đỉnh của khối đa diện. Theo đề ra đỉnh A là đỉnh chung cho ba cạnh, ta gọi ba cạnh đó là AB, AC, AD. Mặt chứa cạnh AB, AC là tam giác nên mặt đó phải là tam giác ABC, tương tự các tam giác ACD và ADB đều là mặt của khối đa diện, mặt thứ tư phải là tam giác BCD. Vậy khối đa diện đó chính là khối tứ diện ABCD.

§2. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG VÀ SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Phép biến hình trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng:

Phép biến hình F trong không gian là một quy tắc để với mỗi điểm M (trong không gian), xác định được một điểm M' duy nhất gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F. Ta còn nói F biến điểm M thành điểm M' và kí hiệu M' = F(M).

*Qua phép biến hình F, mỗi hình **H** được biến thành hình **H'** gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc hình **H**.*

Sau đây là phép đối xứng qua mặt phẳng, đó là một phép biến hình thường gặp.

Phép đối xứng qua mặt phẳng

Định nghĩa 1

***Phép đối xứng qua mặt phẳng** (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.*

Định lí

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN. (Như vậy có thể nói: phép đối xứng qua

ép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì).

đối xứng của một hình

2

ng qua mặt phẳng (P) biến hình ***H*** *thành chính nó thì (P)*
g đối xứng *của hình* ***H.***

đi qua tâm của mặt cầu đều là mặt phẳng đối xứng của

ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh CD thì phép đối
BM) biến A thành A, B thành B, C thành D, D thành C.
ối xứng đó biến tứ diện ABCD thành chính nó (ABCD).
ều ABCD có sáu mặt phẳng đối xứng. Đó là các mặt
ột cạnh và trung điểm của cạnh đối diện.

ện đều và mặt phẳng đối xứng của nó

hình đa diện có 8 mặt là những tam giác đều: EAB, EBC,
B, FBC, FCD và FDC, có 6 đỉnh A, B, C, D, E, F, mỗi
ung cho bốn tam giác đều. Hình đó gọi là *hình bát diện*
m mặt đều) và được kí hiệu là ABCDEF.

C, D nằm trên một mặt phẳng và đó là một mặt phẳng đối
át diện đều ABCDEF.

nh và sự bằng nhau của các hình

ong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt

phép dời hình

ình F trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó
g cách giữa hai điểm bất kì (có nghĩa là nếu F biến hai
N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'M' = MN).

u về phép dời hình

xứng qua mặt phẳng, ta thường gặp một số phép dời hình

: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi
iểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.
g qua đường thẳng (còn gọi là *phép đối xứng trục*): Cho

đường thẳng d, phép đối xứng qua đường thẳng d là phép mỗi điểm thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳn

+ *Phép đối xứng qua một điểm* (còn gọi là *phép đối xứng* M, phép đối xứng qua điểm O là phép biến hình biến mỗ điểm M'sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

Định nghĩa hai hình bằng nhau

Hai hình ***H*** và ***H'*** gọi là bằng nhau nếu có một phép dời này thành hình kia.

Định lí

Hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' bằng nhau nếu chú tương ứng bằng nhau, nghĩa là AB = A'B', BC = B'C', C = D'A', AC = A'C', BD = B'D'.

+ **Hệ quả 1**

Hai tứ diện đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

+ **Hệ quả 2**

Hai hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Phép dời hình

A. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
   A. Phép đồng nhất là một phép dời hình.
   B. Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một phép dờ
   C. Phép dời hình biến hai điểm phân biệt thành hai điểm ph
   D. Phép dời hình f biến điểm A thành điểm B và điểm thì f(M) = M, M là trung điểm của đoạn AB.

2. Phép dời hình f biến hai đường thẳng a, b lần lượt thành a', b'. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
   A. Nếu a, b cắt nhau thì a', b' cắt nhau.
   B. Nếu a, b song song thì a', b' song song hoặc trùng nh
   C. Nếu a, b chéo nhau thì a', b' chéo nhau.
   D. Nếu a, b không có điểm chung thì khoảng cách g khoảng cách giữa a' và b'.

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu phép biến hình f biến hình vuông ABCD cạnh a thành hình vuông A'B'C'D' có đường chéo A'C' = $a\sqrt{2}$ thì f là phép dời hình.

B. Nếu phép biến hình f biến tam giác đều ABC thành tam giác đều A'B'C' thì f là phép dời hình.

C. Nếu phép biến hình f biến hình lập phương thành hình lập phương thì f là phép dời hình.

D. Nếu phép biến hình f biến tứ diện đều ABCD thành tứ diện đều A'B'C'D' thì f là phép dời hình.

4. Cho phép dời hình f biến hai điểm phân biệt A và B thành hai điểm C và D (theo thứ tự) và trung điểm M của AB là điểm bất biến đối với f. Khẳng định nào sau đây không sai?

A. ABCD là một tứ diện. B. ABCD là một hình vuông.

C. ACBD là một hình chữ nhật. D. ACBD là một hình thang vuông.

B. Bài tập tự luận

5. Cho tứ diện ABCD. Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm A, B, C thành chính nó phải là phép đồng nhất.

6. Cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' có các cạnh tương ứng bằng nhau AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', DB = D'B', AC = A'C'. Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'.

7. Chứng minh rằng phép dời hình biến một mặt cầu thành một mặt cầu có cùng bán kính.

8. Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình f biến A thành A, biến B thành B. Chứng minh rằng f biến mọi điểm M nằm trên đường thẳng AB thành điểm M.

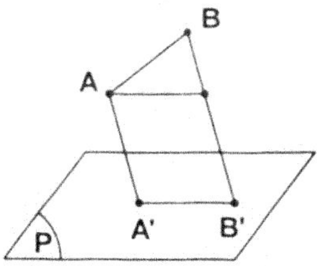
9. Cho hai tam giác bằng nhau ABC và A'B'C' (AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'). Chứng minh rằng có đúng hai phép dời hình, mỗi phép biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

10. Cho tứ diện đều ABCD và phép dời hình f biến ABCD thành chính nó, nghĩa là biến mỗi đỉnh của tứ diện thành một đỉnh của tứ diện. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho M = f(M) trong các trường hợp sau đây:

a. f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A. b. f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D.

c. f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D.

Hướng dẫn



1. Câu B sai, xem hình vẽ, A'B' là hình chiếu của AB trên mp(P) thì A'B' và AB có thể không bằng nhau (khi AB không song song với mp(P)).

Câu A đúng (theo định nghĩa).

Câu C đúng vì phép dời hình f biến $\begin{cases} A \to A' \\ B \to B' \end{cases}$

và AB = A'B'. Do A ≠ B nên A' ≠ B'.

Câu D đúng vì phép dời hình f biến $\begin{cases} A \to B \\ B \to A \\ M \to M' \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} M \in AB \Rightarrow M' \in BA \\ MA = MB \Rightarrow M'B = M'A \end{cases}$

⇒ M' là trung điểm của đoạn BA

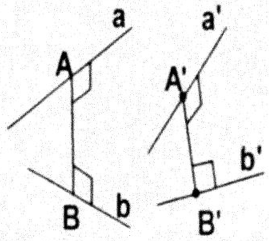
Vậy M' = M hay f(M) = M.

2. • Nếu a và b cắt nhau tại I và f biến I thành I' thì hiển nhiên a' và b' có điểm chung duy nhất I'.

• Nếu a và b song song thì chúng nằm trên mặt phẳng (P) và không có điểm chung. Khi đó nếu f biến (P) thành (P') thì a' và b' cùng nằm trên mặt phẳng (P') và cũng không có điểm chung. Vậy a' và b' song song, không thể trùng nhau nên B sai.

• Nếu a và b chéo nhau thì không có mặt phẳng nào chứa chúng. Bởi vậy chúng không có mặt phẳng nào chứa cả a' và b'. Vậy a' và b' chéo nhau.

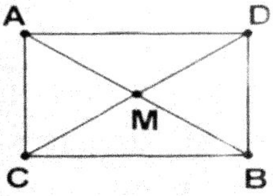
• Lấy hai điểm A và B lần lượt nằm trên a và b sao cho AB ⊥ a, AB ⊥ b. Khi đó nếu phép dời hình f biến A, B lần lượt thành A', B' thì A' ∈ a', B' ∈ b', A'B' ⊥ a', A'B' ⊥ b' và AB = A'B'. Suy ra khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a' và b'.



3. Chỉ có câu A đúng. Vì f biến hình vuông ABCD cạnh bằng a thành hình vuông A'B'C'D' cũng có cạnh bằng a (hình vuông A'B'C'D' có đường chéo A'C' = $a\sqrt{2}$ nên có cạnh bằng a).

Câu B, C, D: chưa đủ điều kiện để kết luận f là phép dời hình.

4. Phép dời hình f biến $\begin{cases} A \to C \\ B \to D \\ M \to M \end{cases}$



$\Rightarrow$ MA = MC và MB = MD

Mà MA = MB (vì M là trung điểm của AB)

Nên MA = MB = MC = MD

$\Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

***Chú ý**: CD là ảnh của AB qua phép dời hình f, mà M $\in$ AB nên f(M) $\in$ CD $\Rightarrow$ M $\in$ CD (vì f(M) = M).*

5. Giả sử phép dời hình f biến các điểm A, B, C, D thành chính các điểm đó tức là f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C, f(D) = D. Ta chứng minh rằng f biến điểm M bất kì thành M. Thật vậy giả sử M' = f(M) và M' khác với M. Khi đó vì phép dời hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên AM = AM', BM = BM', CM = CM', DM = DM', suy ra bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM', điều đó trái với giả thiết ABCD là hình tứ diện. Vậy M' trùng với M và do đó f là phép đồng nhất.

6. Giả sử có hai phép dời hình f_1 và f_2 đều biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Nếu f_1 và f_2 khác nhau thì có ít nhất một điểm M sao cho nếu $M_1 = f_1(M)$ và $M_2 = f_2(M)$ thì M_1 và M_2 là điểm phân biệt. Khi đó vì f_1 và f_2 đều là phép dời hình nên
$A'M_1 = AM$ và $A'M_2 = AM$ vậy $A'M_1 = A'M_2$, tương tự
$B'M_1 = B'M_2$, $C'M_1 = C'M_2$, $D'M_1 = D'M_2$, do đó bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng M_1M_2, trái với giả thiết A'B'C'D' là hình tứ diện. Vậy với mọi điểm M ta đều có
$f_1(M) = f_2(M)$, tức là hai phép dời hình f_1 và f_2 trùng nhau.

7. Giả sử S là mặt cầu tâm O bán kính R, và f là phép dời hình bất kì. Gọi O' = f(O) và S' là mặt cầu tâm O' bán kính R. Nếu M $\in$ S và f(M) = M' thì O'M' = OM = R nên M' $\in$ S'. Ngược lại nếu M' $\in$ S' và M' = f(M) thì OM = O'M' = R nên M $\in$ S. Như vậy phép dời hình f biến mặt cầu S thành mặt cầu S' có cùng bán kính.

8. Ta có f(A) = A, f(B) = B. Giả sử điểm M thuộc đường thẳng AB và f(M) = M'. Khi đó M' thuộc đường thẳng A'B' và AM = AM', BM = BM'. Suy ra M' trùng M, tức là f biến M thành chính nó.

9. Trên đường thẳng a vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm D khác với A, trên đường thẳng a' vuông góc với mp(A'B'C') tại A' có hai điểm

phân biệt D_1 và D_2 sao cho $A'D_1 = A'D_2 = AD$. Dễ thấy rằng các hình tứ diện ABCD, $A'B'C'D_1$ và $A'C'B'D_2$ có các cạnh tương ứng bằng nhau. Nếu f là phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì hoặc f biến D thành D_1 hoặc f biến D thành D_2.

Vậy có đúng hai phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Đó là phép dời hình f_1 biến tứ diện ABCD thành tứ diện $A'B'C'D_1$ và phép dời hình f_2 biến tứ diện ABCD thành tứ diện $A'B'C'D_2$.

10. a. Theo giả thiết f(A) = B và f(B) = C), f(C) = A. Bởi vậy f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB = MC. Suy ra tập hợp các điểm M là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b. Theo giả thiết f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D. Bởi vậy f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB và MC = MD, tức là M đồng thời nằm trên các mặt phẳng trung trực của AB và CD. Suy ra tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD.

c. Theo giả thiết f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D. Bởi vậy f(M) = M khi và chỉ khi MA = MB = MC = MD. Suy ra tập hợp các điểm M gồm một điểm duy nhất là trọng tâm tứ diện ABCD.

Dạng 2: Phép tịnh tiến

A. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ với $\vec{v} \neq \vec{0}$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. Tồn tại đường thẳng d sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó.

B. Tồn tại mặt phẳng (P) sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến mặt phẳng (P) thành chính nó.

C. Tồn tại điểm M sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M.

D. Ảnh của tứ diện đều ABCD qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là một tứ diện đều.

2. Cho tứ diện ABCD. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ biến A, B, C, D lần lượt thành A', B', C', D'. Khẳng định nào sau đây sai?

A. ABC.A'B'D là hình lăng trụ tam giác.

B. ABD.A'B'D' là hình lăng trụ tam giác.

C. ABC.A'B'D' là hình lăng trụ tam giác.

D. $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD'}$.

3. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 3a. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ biến A, B, A', B' thành A_1, B_1, A'_1, B'_1 (theo thứ tự). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $ABB_1.A'B'B'_1$ là hình lăng trụ tam giác đều.

B. $DCB_1.D'C'B'_1$ là hình lăng trụ tam giác đều.

C. $A_1B_1CD.A'_1B'_1C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều.

D. $ABB_1A_1.A'B'B'_1A'_1$ là hình lăng trụ tứ giác đều.

4. Cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Tứ diện ABCD biến thành chính nó khi $\vec{v} = \vec{0}$.

B. Mặt phẳng (P) biến thành chính nó khi $\vec{v}$ có giá là đường thẳng d song song hoặc nằm trong mp(P).

C. Đường thẳng d biến thành chính nó khi $\vec{v} \neq \vec{0}$ và $\vec{v}$ có giá là đường thẳng vuông góc với d.

D. Mặt phẳng (P) biến thành mp(Q) // mp(P) khi $\vec{v} \neq \vec{0}$ và $\vec{v}$ có giá là đường thẳng cắt mp(P).

B. Bài tập tự luận

5. Cho 3 tia Ax, By, Cz song song cùng chiều và không đồng phẳng. Trên tia Ax, By, Cz lần lượt lấy các điểm M, N, P thay đổi sao cho AM = BN = CP.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn NP.

c. Suy ra tập hợp trọng tâm G của tam giác MNP.

6. Chứng minh rằng phép tịnh tiến biến một đường thẳng a thành đường thẳng a' thì hoặc a' // a hoặc a' trùng với a.

7. Chứng minh rằng hợp thành của nhiều phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

8. Trong không gian cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó a cắt b, a' cắt b', a // a' và b // b'. Tìm phép tịnh tiến biến a thành a' và biến b thành b'.

9. Cho hai đường thẳng song song a và a', hai mặt phẳng (P) và (P') cùng vuông góc với a. Tìm phép tịnh tiến T biến a thành a' và biến (P) thành (P').

10. Cho tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu (S) bán kính R = AB, một điểm M thay đổi trên mặt cầu. Gọi C', D', M' là các điểm sao cho:
$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Chứng minh rằng nếu BCD'M' là hình tứ diện thì tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó nằm trên (S).

Hướng dẫn

1. * Câu C sai vì $\vec{v} \neq \vec{0}$ mà $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ nên $\overrightarrow{MM'} \neq \vec{0}$

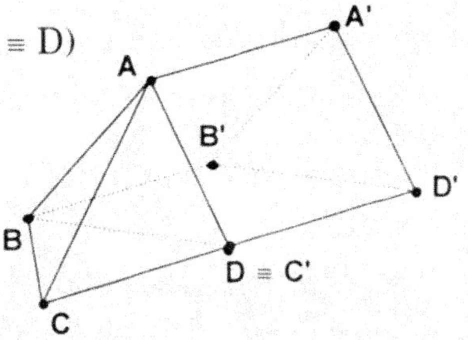
$\Rightarrow$ M không trùng $M' = T_{\vec{v}}(M)$

* Câu A đúng nếu chọn d song song hoặc trùng với giá của $\vec{v}$

* Câu B đúng nếu chọn (P) song song hoặc chứa giá của $\vec{v}$.

* Câu D đúng (tính chất của phép tịnh tiến).

2. Ta có: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD}$ $(C' \equiv D)$



* Câu C sai vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD'}$

* Câu A đúng vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CD}$

* Câu B đúng vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'}$ (cùng bằng $\overrightarrow{CD}$)

* Câu D đúng vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DD'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD'}$

3. Ta có:

* $\vec{v} = \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow AA_1 = a$

* Tương tự: $BB_1 = A'A_1 = B'B_1 = a$

Vậy AA_1B_1B và $A'A_1B_1B'$ là hai hình vuông.

$\Rightarrow ABB_1A_1.A'B'B_1A_1$ là hình lăng trụ tứ giác đều.

4. Câu C.

5. a. Ax, By, Cz không đồng phẳng ⇒ A, B, C không thẳng hàng ⇒ mặt phẳng (ABC) cố định.

Ta có $\left.\begin{matrix} MN \parallel AB \\ MP \parallel AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$

b. Gọi O là trung điểm của BC. Xét mặt phẳng (By, Cz): tứ giác BCPN là hình bình hành

$\left.\begin{matrix} IN = IP \\ OC = OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ I nằm trên tia $Ot \parallel By \parallel Cz$.

c. $\overrightarrow{AG'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AO} \Rightarrow$ G thuộc tia G't là ảnh của Ot qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AO}$.

6. Giả sử cho phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ và đường thẳng a. Trên a ta lấy 2 điểm phân biệt A, B và gọi A', B' lần lượt là ảnh của A và B qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó đường thẳng a' đi qua A', B' là ảnh của đường thẳng a qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$. Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v}$ nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Từ đó suy ra a và a' song song hoặc trùng nhau. Chúng trùng nhau khi A' ∈ a, hay a song song với đường thẳng chứa $\vec{v}$.

7. Giả sử T_1 và T_2 lần lượt là các phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$. Nếu T_1 biến điểm M thành điểm M_1 và T_2 biến M_1 thành M_2 thì hợp thành $T_2 \circ T_1$ biến điểm M thành điểm M_2. Vì $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v_2}$ nên $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$. Vậy $T_2 \circ T_1$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

Một cách tổng quát: hợp thành của n phép tịnh tiến đã cho là một phép tịnh tiến có vectơ tịnh tiến bằng tổng các vectơ của các phép tịnh tiến đã cho.

8. Gọi O là giao điểm của a và b, O' là giao điểm của a' và b'. Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ sẽ biến a thành a' và biến b thành b'.

9. Gọi O là giao điểm của a và (P), O' là giao điểm của a' và (P'). Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ sẽ biến a thành a' và biến (P) thành (P').

10. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ biến A thành B, C thành C', D thành D' và M thành M', tức là biến tứ diện ACDM thành tứ diện BC'D'M', nên T biến tâm O của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ACDM thành tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BC'D'M', tức là $\overrightarrow{OO'} = \vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Vì OO' = AB = R nên điểm O' nằm trên mặt cầu (S).

Dạng 3: Phép đối xứng qua mặt phẳng

A. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Hình chóp đều S.ABC có mấy mặt đối xứng?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

2. Hình tứ diện đều ABCD có mấy mặt đối xứng?

A. 0 B. 2 C. 4 D. 6.

3. Hình lập phương có mấy mặt đối xứng?

A. 6 B. 5 C. 9 D. 3.

4. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Lấy điểm A ∈ (P) và điểm B ∈ (Q) sao cho AB ⊥ (P). Xét các phép biến hình sau:

$$M \xrightarrow{Đ_{(P)}} M_1 \xrightarrow{Đ_{(Q)}} M_2, \quad M \xrightarrow{f} M_2$$

(f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M_2)

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. f là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

B. f là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

C. f là phép đối xứng qua mp(R), mp(R) ở giữa (P) và (Q).

D. f là phép đối xứng qua mp (α), mp (α) là mặt phẳng trung trực của AB.

B. Bài tập tự luận

5. Cho mặt phẳng (P) và 2 điểm A, B không nằm trên (P). Tìm vị trí của điểm M trên (P) sao cho tổng MA + MB nhỏ nhất.

6. Cho mặt phẳng (P) và cho phép dời hình f có tính chất: f biến điểm M thành điểm M khi và chỉ khi M nằm trên (P). Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng qua mặt phẳng (P).

7. Chứng minh rằng:

a. Nếu D_p là phép đối xứng qua mặt phẳng (P) thì $D_p \circ D_p = e$..

b. Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song là một phép tịnh tiến.

c. Mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song bằng nhiều cách.

8. Chứng minh rằng:

a. Cho T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và Dp là phép đối xứng qua mp(P) vuông góc với $\vec{v}$. Khi đó $T \circ D_p$ và $D_p \circ T$ đều là các phép đối xứng qua mặt phẳng.

b. Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng qua các mặt phẳng song song là một phép tịnh tiến.

c. Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng qua các mặt phẳng song song là một phép đối xứng qua mặt phẳng.

9. Cho phép đối xứng D_p qua mặt phẳng (P) và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ theo vectơ $\vec{v}$ trong đó $\vec{v}$ // (P) ($\vec{v}$ vu~~ông góc với vectơ pháp tuyến của~~ (P)). Phép

hợp thành $F = T_{\vec{v}} \circ D_p$ được gọi là *phép đối xứng trượt*. Mặt phẳng (P) gọi là *mặt phẳng đối xứng*, vectơ $\vec{v}$ gọi là *vectơ trượt*.

a. Hãy nêu cách dựng ảnh của một điểm M qua phép đối xứng trượt F.

b. Chứng minh rằng $F = D_p \circ T_{\vec{v}}$.

c. Chứng minh rằng với mọi điểm M và ảnh M' = F(M), trung điểm I của MM' luôn nằm trên một mặt phẳng cố định.

10. Cho hai mặt phẳng α và β vuông góc với nhau theo giao tuyến c và một đoạn thẳng AB ở trong α song song với c. Gọi O là hình chiếu vuông góc của trung điểm I của AB trên c; Oz là một đường thẳng trong β quay quanh O. Chứng minh rằng $\widehat{AOz} + \widehat{BOz}$ không đổi.

Hướng dẫn

1. Câu D.

Hình chóp tam giác đều S.ABC có ba mặt đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh đáy.

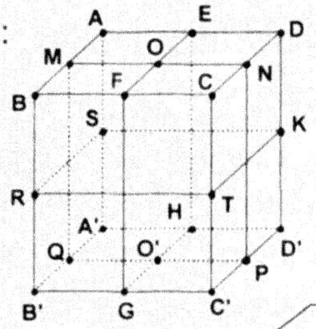
Ví dụ (SAM) là mặt phẳng trung trực của BC, đó cũng là mặt đối xứng của S.ABC.

2. Câu D.

Giả sử (α) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều ABCD, tức là phép đối xứng mặt phẳng (α) biến tập hợp {A, B, C, D} thành chính nó. Vì phép đối xứng mặt phẳng (α) không thể biến mỗi đỉnh thành chính nó (vì khi đó phép đối xứng mặt phẳng (α) là phép đồng nhất) nên phải có một đỉnh, A chẳng hạn, biến thành một đỉnh khác, B chẳng hạn. Khi đó (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB (hiển nhiên (α) đi qua C và D).

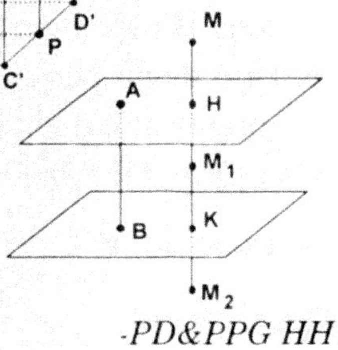
Như vậy tứ diện đều ABCD có 6 mặt phẳng đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực của các cạnh.

3. Câu C. Có 9 mặt phẳng đối xứng là: (ACC'A'), BDD'B'), (MNPQ), (EFGH), (RSKT), (ABC'D'), (CDA'B'), (BCD'A'), (ADC'B').



4. Câu B. Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \\ &= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1K} \\ &= 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}) \\ &= 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$



Vậy M_2 là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

5.* Nếu 2 điểm A và B khác phía đối với mp(P) thì giao điểm của AB với mp(P) là điểm M cần tìm.

* Nếu 2 điểm A và B cùng phía đối với mp(P) lấy điểm A' đối xứng của điểm A qua mp(P), giao điểm của A'B với mp(P) là điểm M cần tìm.

6. Phép dời hình f biến mọi điểm M nằm trên (P) thành M. Với điểm A không nằm trên (P) ta gọi a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Nếu H là giao điểm của a và (P) t và f(H) = H nên f biến a thành đường thẳng đi qua H và vuông góc với (P), vậy f(a) = a. Từ đó suy ra điểm A biến thành điểm A' nằm trên a, A' khác với A và HA = HA'. Vậy (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA'. Suy ra f là phép đối xứng qua mp(P).

7. a. Nếu D_p biến M thành M' thì D_p biến M' thành M nên $D_p \circ D_p = e$.

b. Giả sử D_p và D_Q là các phép đối xứng lần lượt qua các mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Lấy hai điểm I và J lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho $IJ \perp (P)$. Với điểm M bất kì, ta gọi $M_1 = D_p(M)$ và $M' = D_Q(M_1)$ thì phép hợp thành $D_Q \circ D_p$ biến M thành M'.

Nếu gọi H là trung điểm của MM_1 là K là trung điểm của M_1M' thì:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1K} = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

Vậy hợp thành $D_Q \circ D_p$ chính là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{IJ}$.

c. Giả sử T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Ta lấy cặp mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với $\vec{v}$ sao cho (Q) là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$ (có vô số cặp mặt phẳng (P) và (Q) như thế). Gọi D_p và D_Q lần lượt là các phép đối xứng qua (P) và (Q) thì theo câu b) phép tịnh tiến T là hợp thành của D_p và D_Q, tức là $T = D_Q \circ D_p$.

8. a. Gọi (Q) là ảnh của mp(P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$, thì phép tịnh tiến T là hợp thành của hai phép đối xứng D_p và D_Q qua các mặt phẳng (P) và (Q): $T = D_Q \circ D_p$.

Bởi vậy:

$$T \circ D_p = D_Q \circ D_p \circ D_p = D_Q \circ e = D_Q$$

Gọi (Q') là ảnh của mp(P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$, thì phép tịnh tiến T là hợp thành của hai phép đối xứng $D_{Q'}$ và D_p qua các mặt phẳng (Q') và (P): $T = D_p \circ D_Q$.

Bởi vậy:

$$D_p \circ T = D_p \circ D_p \circ D_{Q'} = e \circ D_{Q'} = D_{Q'}.$$

b. Vì hợp thành của 2 phép đối xứng qua 2 mặt phẳng song song là phép tịnh tiến nên hợp thành của 2n phép đối xứng qua 2n mặt phẳng song song là hợp thành của n phép tịnh tiến, và do đó hợp thành đó là một phép tịnh tiến. (Chú ý rằng vectơ tịnh tiến vuông góc với 2n mặt phẳng song song đã cho).

c. Giả sử F là hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng qua các mặt phẳng song song. Hợp thành của 2n phép đối xứng đầu tiên là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với các mặt phẳng song song. Vậy F là hợp thành của phép tịnh tiến đó và phép đối xứng 2n + 1, qua mặt phẳng vuông góc với vectơ $\vec{v}$ suy ra F là phép đối xứng qua mặt phẳng.

9. a. Với mỗi điểm M ta lấy M_1 đối xứng với M qua (P), rồi lấy M' sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$. Khi đó M' là ảnh của M qua phép đối xứng $F = T_V \circ D_p$.

b. Nếu ta lấy điểm M_2 sao cho $\overrightarrow{MM_2} = \vec{v} = \overrightarrow{M_1M'}$, khi đó dễ thấy rằng M' đối xứng với M_2 qua mặt phẳng (P). Suy ra $F = D_p \circ T_v$.

c. Với kí hiệu như câu a. và gọi I là trung điểm của MM', I_1 là trung điểm của MM_1 (hiển nhiên $I_1 \in (P)$). Dễ thấy rằng $\overrightarrow{I_1I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M'} = \frac{\vec{v}}{2}$.

Vậy điểm I luôn luôn nằm trên mặt phẳng (P).

10. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua c, ta có: $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{IO}$

$\Rightarrow$ O là trung điểm của A'B. Vì (α) và (β) vuông góc với nhau theo giao tuyến c; AA' cắt C tại E. Từ đó suy ra: A và A' đối xứng với nhau qua β.

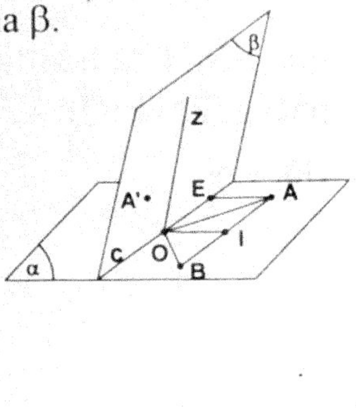
$\Rightarrow$ $\widehat{A'Oz}$ là ảnh của $\widehat{AOz}$ qua phép đối xứng qua β.

$\Rightarrow$ $\widehat{A'Oz} = \widehat{AOz}$

Trong mặt phẳng xác định bởi Oz và A'B ta có:

$\widehat{A'Oz} + \widehat{BOz} = 180^0$

Vậy $\widehat{AOz} + \widehat{BOz} = 180^0$.



Dạng 4: Phép đối xứng qua một điểm

Bài tập

1. Cho phép dời hình f thỏa mãn điều kiện $f \circ f = e$, biết rằng có một điểm I duy nhất sao cho f biến I thành chính nó. Chứng minh rằng f là phép đối xứng tâm.
2. Chứng minh rằng phép đối xứng tâm biến một đường thẳng a thành đường thẳng a' thì hoặc a' // a hoặc a' trùng a.
3. Chứng minh rằng hợp thành của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến. Ngược lại mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng tâm bằng vô số cách.
4. Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ theo vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm DO với tâm là O. Chứng minh rằng các hợp thành $T_{\vec{v}} \circ D_O$ và $D_O \circ T_{\vec{v}}$ là những phép đối xứng tâm.
5. Chứng minh rằng hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng tâm là phép tịnh tiến, hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng tâm là phép đối xứng tâm.
6. Hãy dựng một hình ngũ giác nếu biết trung điểm của năm cạnh.

Hướng dẫn

1. Với một điểm M bất kì khác I, ta gọi M' là ảnh của M qua f, khi đó M và M' không trùng nhau. Vì $f \circ f = e$ nên f biến M' thành M, vậy f biến đoạn thẳng MM' thành đoạn thẳng M'M. Từ đó suy ra f biến trung điểm đoạn thẳng MM' thành chính nó, do đó theo giả thiết trung điểm MM' phải là điểm I. Vậy f là phép đối xứng qua tâm I.
2. Nếu phép đối xứng tâm O biến điểm A thành điểm A', biến điểm B thành điểm B' thì đường thẳng AB biến thành đường thẳng A'B'.
   Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'A'}$.
   Vậy đường thẳng AB và A'B' hoặc song song hoặc trùng nhau.
   Chúng trùng nhau nếu đường thẳng AB đi qua O.
3. Giả sử D_1 và D_2 là các phép đối xứng tâm có tâm lần lượt là O_1 và O_2. Gọi M là một điểm bất kì, $M_1 = D_1(M)$ và $M' = D_2(M_1)$ thì phép hợp thành $D_1 \circ D_2$ biến M thành M'. Ta có:
   $$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{O_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1O_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$$
   Suy ra $D_1 \circ D_2$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Ngược lại cho T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Ta lấy 2 điểm O_1 và O_2 cho $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\vec{v}}{2}$ (có vô số các cặp điểm O_1 và O_2 như vậy). Khi đó hợp thành của các phép đối xứng tâm với tâm lần lượt là O_1 và O_2 là phép tịnh tiến T.

4. Với điểm M ta lấy M_1 đối xứng với M qua O, và lấy M' sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$. Khi đó hợp thành $T_{\vec{v}} \circ D_O$ biến M thành M'. Nếu gọi I là trung điểm của MM' thì $\overrightarrow{OI} = \frac{\vec{v}}{2}$. Vậy điểm I cố định. Suy ra $T_{\vec{v}} \circ D_O$ là phép đối xứng qua I.

Tương tự $D_O \circ T_{\vec{v}}$ là phép đối xứng qua điểm I' mà $\overrightarrow{OI'} = -\frac{\vec{v}}{2}$.

5. Vì hợp thành của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến nên hợp thành của 2n phép đối xứng tâm là hợp thành của n phép tịnh tiến và do đó là một phép tịnh tiến.

Hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng tâm là hợp thành của một phép tịnh tiến và một phép đối xứng tâm nên là một phép đối xứng tâm.

6. Giả sử đã dựng được ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ với các trung điểm M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 của các cạnh tương ứng A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 là các điểm đã cho. Kí hiệu $Đ_1$, $Đ_2$, $Đ_3$, $Đ_4$, $Đ_5$ là các phép đối xứng tâm với tâm tương ứng là M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.

Khi đó hợp thành $f = Đ_5 \circ Đ_4 \circ Đ_3 \circ Đ_2 \circ Đ_1$ là một phép đối xứng tâm, do đó nó có một điểm bất động duy nhất.

Mặt khác $f(A_1) = A_1$, suy ra A_1 chính là tâm của phép đối xứng f. Vậy với điểm B_1 bất kì và $B_6 = f(B_1)$ thì A_1 phải là trung điểm của B_1B_6. Từ đó ta có cách dựng:

* Lấy B_1 bất kì, dựng $B_2 = Đ_1(B_1)$; $B_3 = Đ_2(B_2)$;

$B_4 = Đ_3(B_3)$; $B_5 = Đ_4(B_4)$; $B_6 = Đ_5(B_5)$.

* Lấy A_1 là trung điểm của B_1B_6. Sau đó dựng $A_2 = Đ_1(A_1)$;

$A_3 = Đ_2(A_2)$; $A_4 = Đ_3(A_3)$; $A_5 = Đ_4(A_4)$.

Ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ là ngũ giác cần dựng.

§3. PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN. CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Kiến thức cần nhớ

Phép vị tự trong không gian

Định nghĩa 1

Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *gọi là **phép vị tự**. Điểm O gọi là **tâm vị tự**, số k gọi là **tỉ số vị tự**.*

Các tính chất cơ bản của phép vị tự

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, *và do đó* $M'N' = |k|MN$.

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

Hai hình đồng dạng

Định nghĩa 2

*Hình **H** được gọi là **đồng dạng** với hình **H'** nếu có một phép vị tự biến hình **H** thành hình H_1 mà hình H_1 bằng hình **H'**.*

Khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều

Định nghĩa 3

***Khối đa diện đều** là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:*

***a.** Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh.*

b. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.

Bài tập

1. Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$. Đặt F = T và F' = V∘T. Chứng minh rằng:

a. Có một điểm I duy nhất sao cho F(I) = I và điểm I' duy nhất sao cho F'(I') = I'.

b. F là phép vị tự tâm I tỉ số k, F' là phép vị tự tâm I' tỉ số k.

2. Cho phép vị tự V tâm I tỉ số $k \neq 1$ và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k'. Chứng minh rằng nếu kk'= 1 thì phép hợp thành V'∘V là một phép tịnh tiến.

3. Cho phép vị tự V tâm O tỉ số k và phép vị tự V' tâm O' tỉ số k' với $kk' \neq 1$. Gọi $F = V' \circ V$. Chứng minh rằng :

a. Có điểm I duy nhất sao cho F(I) = I.

b. F là phép vị tự tâm I tỉ số kk'.

4. Chứng minh rằng:

a. Tâm các mặt của một khối lập phương cho trước là các đỉnh của một khối 8 mặt đều.

b. Tâm của các mặt của một khối 8 mặt đều cho trước là các đỉnh của một khối lập phương.

Hướng dẫn

1. a. Giả sử F(I) = I. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu V biến I thành I_1 thì T biến I_1 thành I, tức là: nếu $\overrightarrow{OI_1} = k\overrightarrow{OI}$ thì $\overrightarrow{I_1I} = \vec{v}$. Từ đó suy ra: $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI_1} = \vec{v}$, hay $\overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = \vec{v}$, do đó: $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\vec{v}}{1-k}$. Vậy điểm I xác định duy nhất. Giả sử F(I') = I'. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu T biến I' thành I_1 thì V biến I_1 thành I', tức là: nếu $\overrightarrow{I'I'_1} = \vec{v}$ thì $\overrightarrow{O'I'_1} = k\overrightarrow{OI'_1}$.

Từ đó suy ra:

$$\overrightarrow{OI'} = k\left(\overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{I'I_1}\right), \text{hay } (1-k)\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{I'I'_1} = k\vec{v}, \text{ do đó: } \overrightarrow{OI'} = \frac{k\vec{v}}{1-k}.$$

Vậy điểm I' xác định duy nhất.

b. Viết mỗi điểm M bất kì ta lấy điểm M_1 sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$, rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$. Khi đó phép hợp thành F = V ∘ T biến M thành M'. Ta xác định điểm O' sao cho $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{\vec{v}}{1-k}$ thì O' là điểm cố định (không phụ thuộc M) và:

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{IO} + k\overrightarrow{OM} + \vec{v} = \overrightarrow{IO} + k\left(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IO}\right) + \vec{v}$$

$$= (1-k)\overrightarrow{IO} + \vec{v} + k\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM}$$

Từ đó suy ra T ∘ V là phép vị tự tâm I tỉ số k.

Chứng minh tương tự ta có F = V ∘ T là phép vị tự tâm I' tỉ số k.

2. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k, V' là phép vị tự tâm O' tỉ số k'. Với mỗi điểm M ta lấy M' sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ rồi lấy điểm M' sao cho $\overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'M_1}$ thì phép hợp thành V' ∘ V biến điểm M thành điểm M'. Ta có:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'M_1}$$

$= \overrightarrow{OM_1} - \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1} + k'\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'M_1}$

$= \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (k' - 1)\overrightarrow{O'M_1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OM_1} + (-k')\overrightarrow{M_1O'}$.

Chú ý rằng vì kk' = 1 nên $k = \frac{1}{k'}$, bởi vậy đẳng thức trở thành:

$\overrightarrow{MM'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1O'}\right) = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.

Từ đó suy ra V' ∘ V là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.

3. a. Giả sử F(I) = I. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi nếu V biến I thành I_1 thì V' biến I_1 thành I, tức là:

Nếu $\overrightarrow{OI_1} = k\overrightarrow{OI}$ thì $\overrightarrow{O'I} = k\overrightarrow{O'I_1}$

hay $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OO'} = k(\overrightarrow{OI_1} - \overrightarrow{OO'}) = k(k\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OO'})$

$\Leftrightarrow (1 - kk')\overrightarrow{OI} = (1 - k')\overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{(1-k')\overrightarrow{OO'}}{1 - kk'}$.

Vậy điểm I được xác định duy nhất.

b. Với điểm M bất kì, gọi M_1 là ảnh của M qua phép vị tự V, M' là ảnh của M_1 qua phép vị tự V', thì F biến M thành M'. Khi đó ta có $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{O'M_1}$. Từ đó ta có:

$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{O'M'} - \overrightarrow{O'I} = k\overrightarrow{O'M_1} - \overrightarrow{O'I}$

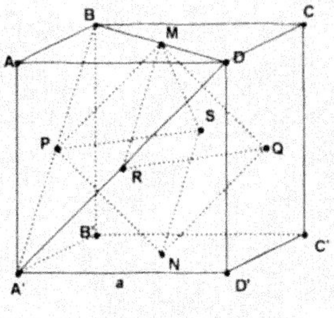
$= k'(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OO'}) - \overrightarrow{O'I} = k'(k\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}) - \overrightarrow{O'I}$

$= kk'\overrightarrow{OM} - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'I} = kk'(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'I}$

$= kk'\overrightarrow{IM} - kk'\overrightarrow{OI} - k'\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OO'} = kk'\overrightarrow{IM}$.

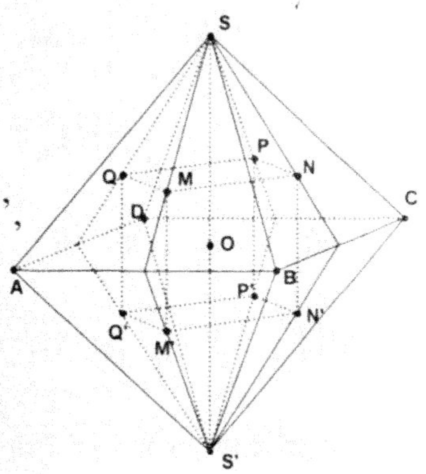
Vậy F là phép vị tự tâm I tỉ số kk'.

4. a. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượng là tâm các mặt ABCD, A'B'C'D', ABB'A', CDD'C', ADD'A', BCC'B'.



Khi đó 8 tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều bằng nhau có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, chúng làm thành khối đa diện 8 mặt với các đỉnh M, N, P, Q, R, S mà mỗi đỉnh có 4 cạnh. Vậy đó là khối 8 mặt đều.

b. Cho khối 8 mặt đều S.ABCDS' cạnh a.
Gọi M, N, P, Q, M', N', P', Q' lần lượt là trọng tâm các mặt SAB, SBC, SCD, SDA, S'AB, S'BC, S'CD, S'DA.
Khi đó 6 tứ giác MNPQ, M'N'P'Q', MNN'M', NPP'N', PQQ'P', QMM'Q' là 6 hình vuông có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, và mỗi đỉnh M, N, P, Q, M', N', P', Q' đều là đỉnh chung của 3 cạnh.
Vậy MNPQ.M'N'P'Q' là khối lập phương.

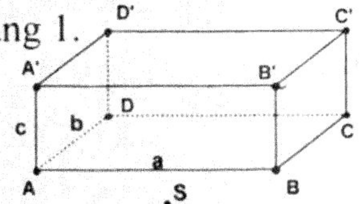


§4. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

Kiến thức cơ bản

1. Thể tích của một khối đa diện

- Thể tích của mỗi khối đa diện là số đo của phần không gian mà nó chiếm chỗ.
- Hai khối đa diện bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.
- Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của các khối đa diện nhỏ đó.
- Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1.



2. Thể tích của khối hộp chữ nhật

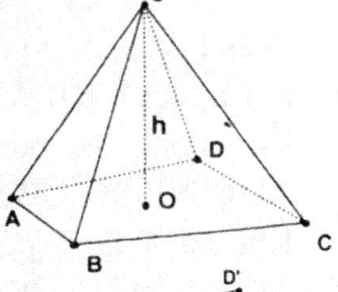
- **Định lí 1:**

Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích số của ba kích thước.

V = abc (a,b,c là ba kích thước của hình chữ nhật)

- **Hệ quả:**

Thể tích của khối lập phương có cạnh bằng a là $V = a^3$

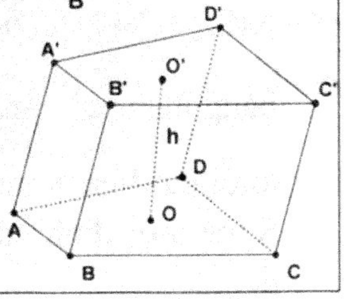


3. Thể tích khối chóp

- **Định lí 2:**

Thể tích của một khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp đó.

$$V = \frac{1}{3}.S_{đáy}.h$$



$S_{đáy}$ là diện tích mặt đáy, h là chiều cao khối chóp

4. Thể tích của khối lăng trụ

- **Định lí 3:**

Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó.

Các dạng bài tập

Dạng 1: Thể tích khối chóp

- *Phương pháp 1*: Sử dụng công thức tính thể tích $V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h$

Ví dụ: Đề dự bị khối D năm 2006

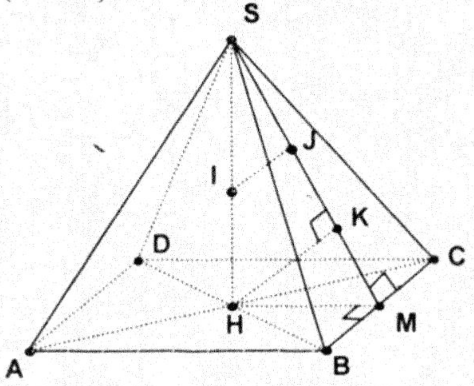
Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Có cạnh đáy bằng a, gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SBC) bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Giải:

Do S.ABCD là hình chóp đều nên H tâm của là hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của BC, K là hình chiếu vuông góc của H lên SM ta có: $BC \perp SH$; $BC \perp HM$. Suy ra $BC \perp (SHM)$.

Do BC nằm trong mp(SBC), nên $(SBC) \perp (SHM)$. Mà $HK \perp SM$

nên $HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = 2\,IJ = 2b$.



Trong Δ vuông SHM ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

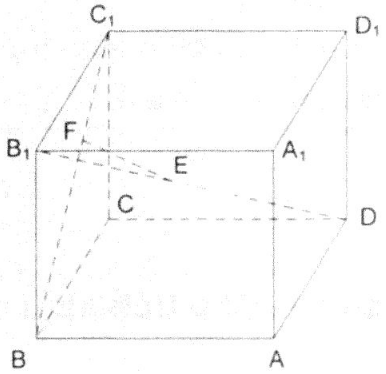
Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.SH.dt(ABCD) = \frac{2}{3}.\frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$ (đpcm)

- ***Phương pháp 2***: Sử dụng công cụ vectơ để tính các yếu tố như đường cao, diện tích đáy của hình chóp.

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh là a. Gọi EF là đường vuông góc chung của DB_1 và BC_1 ($E \in DB_1$, $F \in BC_1$). Khối tứ

diện đều MNPQ sao cho E là trung điểm của MN, F là trung điểm của PQ. Tính thể tích của khối tứ diện đều MNPQ.

Giải:



Gọi $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DD_1}$

Ta có: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$

$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BB_1}$

$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\vec{a} + \vec{c}$

Do $E \in DB_1$ nên $\overrightarrow{DE} = \alpha\overrightarrow{DB_1} = \alpha(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Do $F \in BC_1$ nên $\overrightarrow{BF} = \beta\overrightarrow{BC_1} = \beta(-\vec{a} + \vec{c})$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = -\alpha(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} + \vec{b}) + \beta(-\vec{a} + \vec{c})$

$= (1 - \alpha - \beta)\vec{a} + (1 - \alpha)\vec{b} + (\beta - \alpha)\vec{c}$

Do EF là đoạn thẳng vuông góc chung nên $EF \perp DB_1$ hay ta có:

$\overrightarrow{DB_1}.\overrightarrow{EF} = 0$ Suy ra

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})[(1 - \alpha - \beta)\vec{a} + (1 - \alpha)\vec{b} + (\beta - \alpha)\vec{c}] = 0$

$\Leftrightarrow (2 - 3\alpha)a^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2}{3}$.

Tương tự: $\overrightarrow{BC_1}.\overrightarrow{EF} = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \dfrac{2}{3}.\overrightarrow{DB_1}$, $\quad \overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = -\dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} - \dfrac{1}{6}\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF}^2 = \left(-\dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} - \dfrac{1}{6}\vec{c}\right)^2 = \dfrac{6a^2}{36} \Rightarrow EF = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Gọi cạnh của tứ diện đều là x: Ta có: $EP^2 = EF^2 + PF^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{4} = \dfrac{6a^2}{36} + \dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta PEQ}.MN = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$ (đvtt).

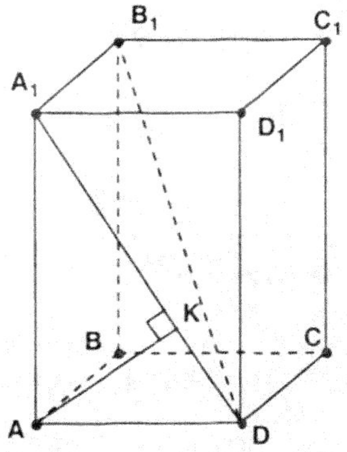
Dạng 2: Thể tích khối lăng trụ

- ***Phương pháp 1:*** Tính thể tích khối lăng trụ bằng công thức thể tích $V = S_{đáy}.h$.

Ví dụ: Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và A_1D bằng 2, độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5.

a. Kẻ $AK \perp A_1D$, $K \in A_1D$. Chứng minh rằng $AK = 2$.

b. Tìm thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Giải:

a. $AB // A_1B_1 \Rightarrow AB // (A_1B_1D)$

$\Rightarrow d(A,(A_1B_1D)) = d(AB,A_1B_1D)$.

Ta có $A_1B_1 \perp (AA_1D_1D) \Rightarrow A_1B_1 \perp AK$.

Mặt khác $A_1D \perp AK \Rightarrow AK \perp (A_1B_1D)$.

Vậy $AK = d(A,(A_1B_1D)) = d(AB, A_1D) = 2$.

b. Xét tam giác vuông A_1AD, ta có: $AK^2 = A_1K.KD$

Đặt $A_1K = x \Rightarrow 4 = x(5 - x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Với $x = 1$, $AD = \sqrt{AK_2 + KD_2} = 2\sqrt{5}$; $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 + KD^2} = \sqrt{5}$

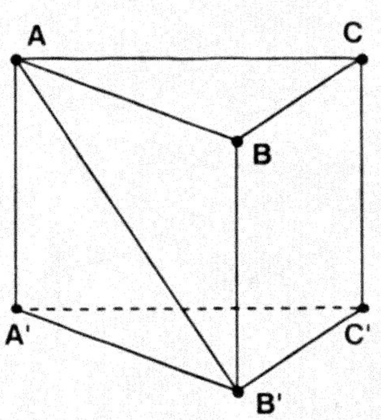
Khi đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 20\sqrt{5}$ (đvtt).

Với $x = 4$, tương tự ta có: $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 10\sqrt{5}$ (đvtt)..

- ***Phương pháp 2:*** Tính thể tích khối lăng trụ bằng phương pháp sử dụng công thức vectơ để tính các yếu tố độ dài.

Ví dụ: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C', có cạnh bằng AB = a. Tính thể tích của khối lăng trụ biết rằng $AB' \perp BC'$.

Giải:



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Suy ra $\overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$

Do $AB' \perp BC'$ nên $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0$

Hay $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}^2 = 0$. Do $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$

Ta có: $\vec{b}.\vec{c} = a^2.\cos 60° = \dfrac{a^2}{2}$

$\vec{b} = a^2, \vec{a}^2 = \overrightarrow{AA'}^2 \Rightarrow AA'^2 = \dfrac{a^2}{2}$ Hay $AA' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC đều là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là:

$$V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8} \text{ (đvtt).}$$

Dạng 3: Thể tích khối hộp

+ Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước.

+ Thể tích khối lập phương cạnh a là: $V = a^3$ (đvtt)

Ví dụ: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh 2a, $\widehat{BAD} = 60°$. Đường chéo AC' tạo với đáy một góc α. Gọi I là giao điểm các đường chéo của hình hộp, O là tâm của ABCD. Tính thể tích khối hộp theo α và a.

Giải:

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình thoi.

Do $\widehat{BAD} = 60°$ nên Δ ABD là tam giác đều cạnh 2a.

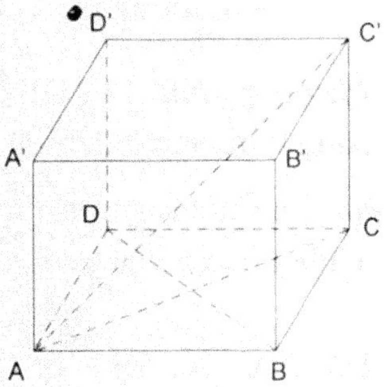
Suy ra:

$OA = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2a\sqrt{3}$

$BD = 2a$.

Mặt khác CC' ⊥ (ABCD) nên:

$\widehat{CAC'} = \alpha \Rightarrow CC' = AC.\tan\alpha = 2a\sqrt{3}\tan\alpha$.



$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}.AC.BD.CC'$$

$$= \frac{1}{2}.2a\sqrt{3}.2a.2a\sqrt{3}\tan\alpha = 12a^3\tan\alpha.$$

Bài tập vận dụng

1. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O' là tâm của A'B'C'D' và thể tích của khối O'.ABCD bằng $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. Tính thể tích của khối lập phương.

2. Khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AA'= $a\sqrt{2}$, AB = a và A'C = 3a. Tính thể tích khối hộp.

3. Khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, diện tích của ABCD và ABC'D' lần lượt là 2a2 và $a^2\sqrt{5}$. Tính thể tích của khối hộp chữ nhật.

4. Khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có A'A, AB, BC vuông góc nhau từng đôi một và A'A = 2a, AB = a, BC = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

5. Khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông cân ở A, mặt bên BB'C'C là hình vuông có diện tích bằng $2a^2$. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

6. Khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và hình chiếu (vuông góc) của A' lên mp(ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

7. Khối lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{A} = 60°$, A'B hợp với đáy (ABCD) một góc 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ .

8. Khối lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D', AA'C'C là hình vuông và có diện tích bằng a^2. Tính thể tích của khối lăng trụ .

9. Khối lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F' có đáy nội tiếp đường tròn có đường kính bằng 2R và ADD'A' có diện tích bằng $3R^2$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

10. Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AC' = a và AC' hợp với đáy (ABC) một góc bằng φ. Tính thể tích của khối lăng trụ.

11. Hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C'có đáy ABC là tam giác vuông tại A,AC = b, $\widehat{C} = 60$. Đường chéo BC' của mặt bên (BB'C'C) tạo với mặt phẳng (A A'C'C) một góc 30 .
a. Tính độ dài AC'.
b. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

12. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều các điểm A,B,C. Cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

13. Tính thể tích khối chóp tứ giác đều SABCD biết AB = a và góc giữa mặt bên và đáy bằng α, trung đoạn bằng d và góc giữa cạnh bên và đáy bằng φ.

14. Cho hình chóp tam giác đều SABC

a. Biết AB = a, SA = l. Tính thể tích của khối chóp SABC

b. Biết SA = l và góc giữa mặt bên và đáy bằng α. Tính thể tích của khối chóp SABC.

15. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi K là trung điểm của BC và I là tâm mặt bên CC'D'D.

a. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (AKI).

b. Tính thể tích của các khối đa diện do mặt phẳng (AKI) chia ra trên hình lập phương.

16. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB, SC. So sánh thể tích của hai khối đa diện do mặt phẳng (MNP) chia ra trên hình chóp SABCD.

17. Cho hình chóp tứ giác đều có chiều cao h và cạnh đáy a. Hãy tính thể tích của khối lập phương có một mặt nằm trên đáy của hình chóp và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh bên của hình chóp đó.

18. Cho hình lăng trụ xiên ABC. A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh đáy BC = 2a, $\widehat{BAC} = \alpha$, đỉnh A' của đáy trên cách đều ba điểm A, B, C và cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60 .

Tính thể tích khối lăng trụ ABC. A'B'C'.

19. Một hình lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác vuông ở B có các cạnh bên AA' = BB' = CC' = c và AB = a, BC = b $(c^2 \geq a^2 + b^2)$

a. Chứng minh rằng tam giác AB'C' là tam giác vuông.

b.Chứng minh rằng các tam giác AB'C', AB'C chia khối lăng trụ ABC.A'B'C' thành 3 khối chóp có thể tích bằng nhau.

20. Cho hình chóp tứ giác SABCD có SA = x. Tất cả các cạnh còn lại của hình chóp cùng có độ dài bằng 1.

a. Tính diện tích đáy ABCD và đường cao của hình chóp, từ đó suy ra điều kiện của x để bài toán có nghĩa.

b. Tìm x để khối chóp SABCD có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn

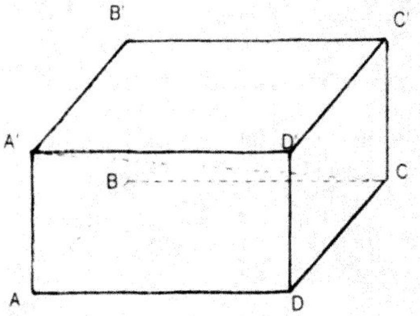
1. $V_{O'.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.O'O$

$= \frac{1}{3}.S_{ABCD}.AA'$ (vì OO' = AA')

$= \frac{1}{3}.V_{\text{Khối lập phương}}$

Vậy $V_{\text{khối lập phương}} = 3.V_{O'.ABCD} = 3.\frac{2a^3\sqrt{2}}{3} = 2a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

2. $V = AA'.S_{ABCD} = AA'.AB.AD$



Ta có:

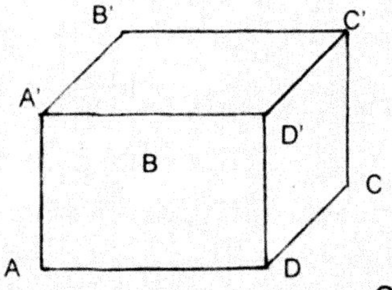
$A'C^2 = AB^2 + AD^2 + A'A^2$

$\Leftrightarrow 9a^2 = a^2 + AD^2 + 2a^2$

$\Leftrightarrow AD = a\sqrt{6}$

Vậy $V = a\sqrt{2}.a.a\sqrt{6} = 2a^3\sqrt{3}$ (đvtt).

3. $V_{\text{Khối hộp chữ nhật}} = AB.AD.AA'$



• $S_{ABCD} = AB.AD = a.AD = 2a^2$

$\Leftrightarrow AD = 2a$

• $S_{ABC'D'} = AB.AD' = a.AD'$

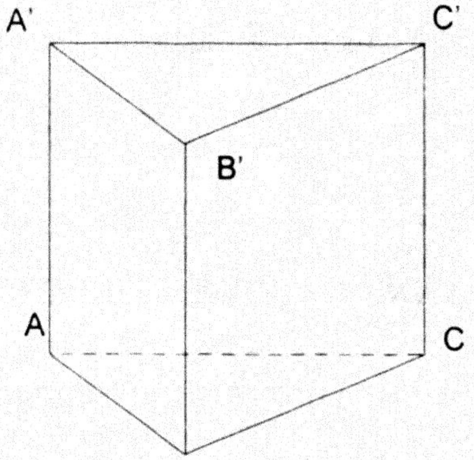
$= a^2\sqrt{5} \Leftrightarrow AD' = a\sqrt{5}$

Ta có:

$AA' = \sqrt{AD'^2 - AD^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a$

Vậy $V_{\text{khối hộp chữ nhật}} = a.2a.a = 2a^3$ (đvtt).

4. AA', AB, BC vuông góc từng đôi một



$\begin{cases} AA' \perp (ABC) \\ \text{Tam giác ABC vuông ở B} \end{cases}$

$\Rightarrow V_{\text{Khối lăng trụ}} = AA'.S_{\Delta ABC}$

$= \frac{1}{2}.AA'.AB.BC$

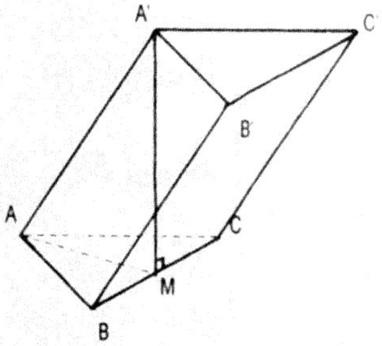
$= a^3\sqrt{3}$ (đvtt).

5. BB'C'C là hình vuông có diện tích bằng $2a^2$.

$\Rightarrow BB' = BC = a\sqrt{2}$. Tam giác ABC vuông cân ở A và có cạnh huyền $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a$.

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = BB'.S_{\Delta ABC}$

$$= BB'.\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{\sqrt{2}}.$$



6. Tam giác A'AM vuông ở M nên:

$$A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2}$$

$$= \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}$$

$\Rightarrow V_{\text{Khối lăng trụ}} = A'M\, S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).

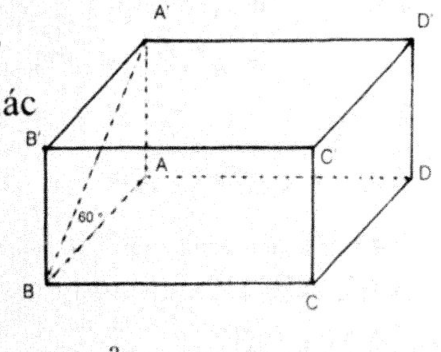
Chú ý trong tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

7. AB là hình chiều vuông góc của A'B lên đáy (ABCD)

$\Rightarrow$ Góc hợp bởi A'B và đáy (ABCD) là $\widehat{A'BA} = 60°$ suy ra

AA'= AB.tan $\widehat{A'BA}$ = a. tan 60° = $a\sqrt{3}$



ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{A} = 60°$

$\Rightarrow$ Hai tam giác ABD và CBD là hai tam giác đều cạnh bằng a

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{\Delta ABD}$

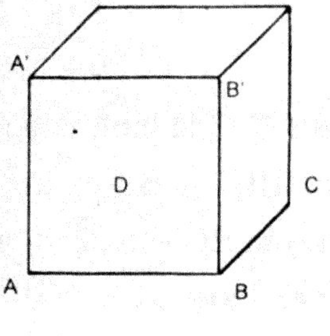
$$= 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = AA'\, S_{\Delta ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$ (đvtt).

8. AA'C'C là hình vuông và có diện tích bằng a^2

$\Rightarrow$ AA' = AC = .. = a

Hình vuông ABCD có đường chéo AC = a



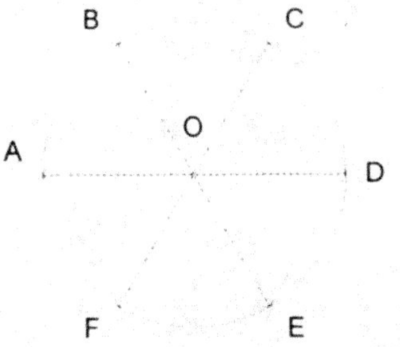
$\Rightarrow$ Cạnh $AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = AA'.S_{\Delta ABCD}$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a = \frac{a^3}{2} \text{ đvtt.}$$

9. $V_{\text{Khối lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.AA'$

Đáy ABCDEF là lục giác đều nội tiếp đường kính bằng 2R



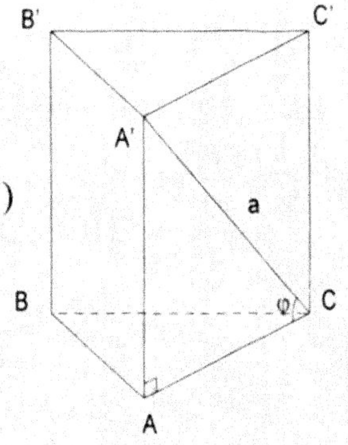
$\Rightarrow S_{\text{đáy}} = 6.S_{\Delta OAB} = 6.\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

ADD'A' là hình chữ nhật nên có diện tích bằng $AA'.AD = 3R^2$

$\Leftrightarrow AA'.2R = 3R^2 \Leftrightarrow AA' = \dfrac{3R}{2}$

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{9R^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt).

10. AC là hình chiếu vuông góc của A'C lên đáy (ABC)



$\Rightarrow$ Góc hợp bởi A'C và đáy (ABC) là: $\widehat{A'CA} = \varphi$

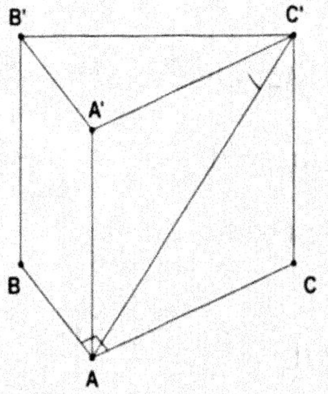
$$\Rightarrow \begin{cases} AC = A'C\cos\varphi = a\cos\varphi \\ AA' = A'C.\sin\varphi = a.\sin\varphi \end{cases}$$

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = S_{\Delta ABC}.AA'$

$= \dfrac{AC^2\sqrt{3}}{4}.AA' = \dfrac{a^2\cos^2\varphi\sqrt{3}}{4}.a.\sin\varphi$

$= \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}.\cos^2\varphi.\sin\varphi$ (đvtt).

11. a. Ta có



$$\left.\begin{matrix} BA \perp AC \\ BA \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BA \perp (ACA')$$

$\Rightarrow$ AC' là hình chiếu của BC' trên (AA'C'C)

và góc giữa BC' và mp(AA'C'C) là: $\widehat{BC'A} = 30$.

Suy ra tam giác ABC' vuông tại A và

$\widehat{BC'A} = 30^\circ . \Rightarrow AC' = AB\ \cot 30 = 3b$.

b. Vì lăng trụ ABC.A'B'C' là lăng trụ đứng nên

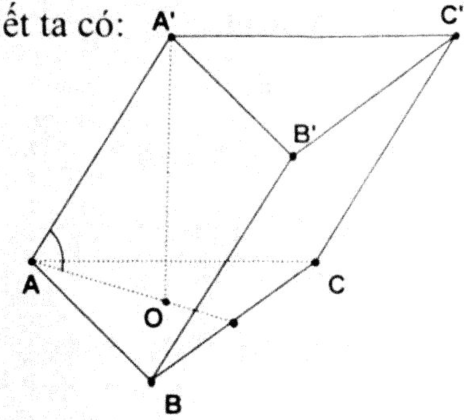
$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC'$ (1). Ta có tam giác ABC vuông tại A

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$ (2). Mặt khác $CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2$

$\Rightarrow CC' = 2\sqrt{2}\ b$ (3). Thay (2), (3) vào (1) ta có:

$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}b^2\sqrt{3}2\sqrt{2}b = b^3\sqrt{6}$ (đvtt).

12. Đỉnh A' cách đều 3 điểm A, B, C nên hình chiếu của A trên (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC. Từ giả thiết ta có:



$\widehat{OAA'} = 60^\circ$; $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow AA' = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $A'O = a$

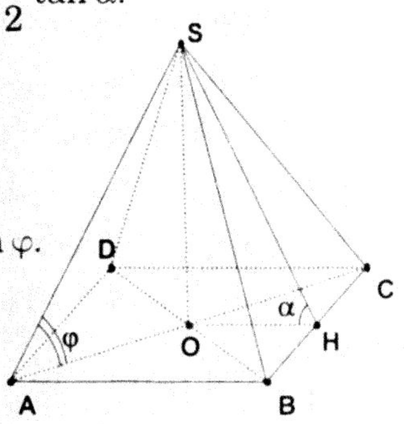
$\Rightarrow V_{ABCA'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'O$

$= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt).

13. a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, H là trung điểm của BC.
Ta có:

$$\alpha = \widehat{SHO};\ AB = a;\ SO = OH.\tan\alpha = \frac{a}{2}\tan\alpha.$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}a^2\frac{a}{2}\tan\alpha = \frac{1}{6}a^3\tan\alpha$$



b. Biết SH = d,

$\widehat{SAO} = \varphi, h = SO = AO\ \tan\varphi = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi.$

Mặt khác ta có:

$h^2 = d^2 - \dfrac{a^2}{4}$. ($\Delta SHO$ vuông tại O).

Suy ra:

$$d^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2\tan^2\varphi}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{4d^2}{1+2\tan^2\varphi} \Rightarrow a = \frac{2d}{\sqrt{1+2\tan^2\varphi}}.$$

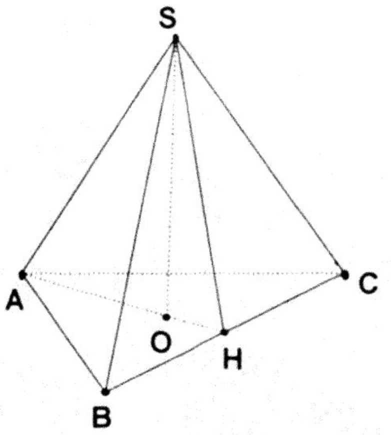
Từ đó ta có:

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan\varphi\frac{2d}{\sqrt{1+2\tan^2\varphi}} = \frac{\sqrt{2}\,d\tan\varphi}{\sqrt{1+2\tan^2\varphi}}.$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}a^2 h = \frac{4\sqrt{2}\,d^3\tan\varphi}{(1+2\tan^2\varphi)\sqrt{1+2\tan^2\varphi}} \text{ (đvtt)}$$

14. a. Gọi O là trọng tâm của tam giác đều ABC và H là trung điểm của cạnh BC.

$SO^2 = SA^2 - OA^2 = l^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{3l^2 - a^2}}{\sqrt{3}}$



$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3l^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3l^2 - a^2}}{12}$.

b. $h = OH \tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\alpha$ (1)

Mặt khác $h^2 - SA^2 - OA^2 = l^2 - \frac{a^2}{3}$ (2).

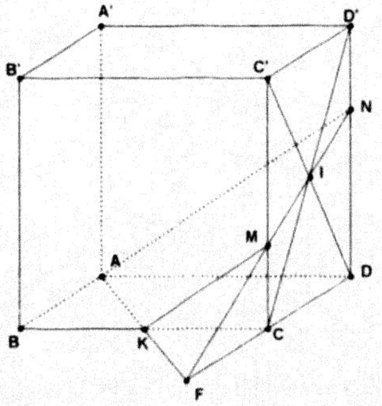
Từ (1) và (2) suy ra:

$l^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2\tan^2\alpha}{12} \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + \frac{a^2\tan^2\alpha}{12} = l^2$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{12l^2}{4 + \tan^2\alpha} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{4 + \tan^2\alpha}}$

Vậy $V = \frac{\sqrt{3}\tan\alpha l^3}{(4 + \tan\alpha)\sqrt{4 + \tan^2\alpha}}$ (đvtt).

15. a. Gọi F là giao điểm của AK và CD. Đường thẳng FI cắt CC' và D D'tại M, N. Thiết diện cần tìm là tứ giác AKMN. Ta có KB = KC và AB song song với CF nên CF = BA mà BA = CD do đó CF = CD. Trong tam giác FC'D, FI và CC' là các trung tuyến. Suy ra M là trọng tâm tam giác FC'D nên I là trung điểm của CD nên



$D'N = CM \frac{a}{3} \Rightarrow DN = \frac{2a}{3}$.

b. Gọi V_1 là thể tích khối tứ diện ADNKCM. Đây là hình chóp cụt tam giác có đường cao CP

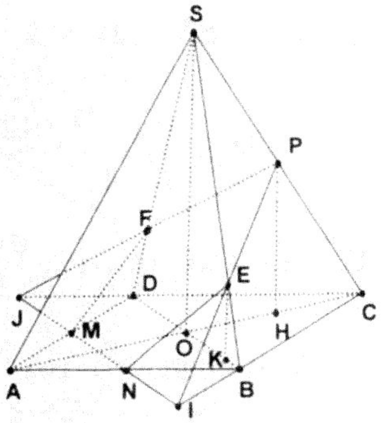
$\Rightarrow V_1 = \frac{h}{3}.(B + B' + \sqrt{BB'}$); $h = CD = a$;

$V_1 = \frac{a}{3}(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{6}) = \frac{7a^3}{36}$

V_2 là thể tích khối đa diện còn lại:

$V_2 = a^3 - \frac{7\ a^3}{36} = \frac{29\ a^3}{36}$ (đvtt).

16. Ta có mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo thiết diện MNEDF. Xét hình đa diện có các đỉnh M, N, E, P, F, B, C, D. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện này. Ta có:



$$V_1 = V_{PIJC} - (V_{IBNE} + V_{JDMF}).$$

$$V_{PIJC} = \frac{1}{3} S_{\Delta CIJ} PH.$$

Trong đó PH là khoảng cách từ P đến mặt phẳng (ABCD), $H \in AC$. Đặt $AB = a$, $SO = h$.

Ta có: $S_{\Delta CIJ} = a^2 + \frac{a^2}{8} = \frac{9a^2}{8}$.

và $PH = \frac{1}{2} SO = \frac{h}{2} \Rightarrow V_{PIJC} = \frac{1}{3}\frac{9a^2}{8}\frac{h}{2} = \frac{3a^2}{16}$. Dựng $PQ \parallel CB$

Ta có $PQ = \frac{1}{2}BC = BI \Rightarrow EP = EI \Rightarrow EK = \frac{1}{2}PH = \frac{h}{4}$.

(EK là khoảng cách từ E đến mặt phẳng(ABCD))

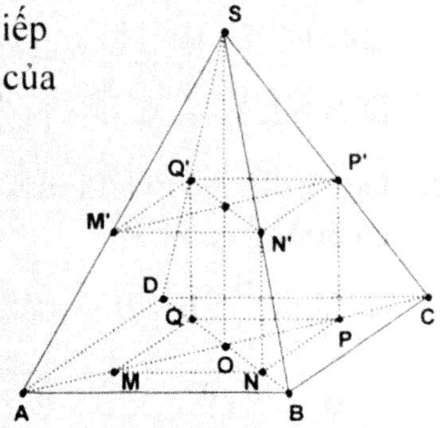
$V_{IBNE} = \frac{1}{3}S_{\Delta IBN} EK = \frac{a^2h}{96}$. Tương tự

$V_{JMDF} = \frac{a^2h}{96} \Rightarrow V_1 = \frac{3a^2h}{16} - \frac{a^2h}{48} = \frac{a^2h}{6}$; $V_{S.ABCD} = \frac{a^2h}{3}$.

Suy ra thể tích còn lại là: $V_2 = V - V_1 = \frac{a^2h}{6}$

Vậy $V_1 = V_2$

17. Xét hình lập phương MNPQM'N'P'Q' nội tiếp trong hình chóp đều SABCD. Gọi x là cạnh của hình lập phương, ta có



$$\frac{MM'}{OS} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a-x}{a}$$

$$\Leftrightarrow ax = ah - hx \Leftrightarrow x = \frac{ah}{a+h}.$$

Vậy thể tích khối lập phương cần tìm là $V = \left(\frac{ah}{a+h}\right)^3$ (đvtt).

18. Kẻ $AH \perp (ABC)$; Ta có $AA' = A'B = A'C$

$\Rightarrow HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ΔABC cân tại A

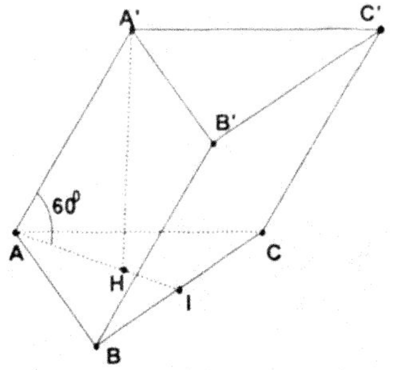
Suy ra H thuộc đường cao AI của ΔABC

Do đó $\widehat{A'AH} = 60$.

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = a^2\cot\frac{\alpha}{2}$.

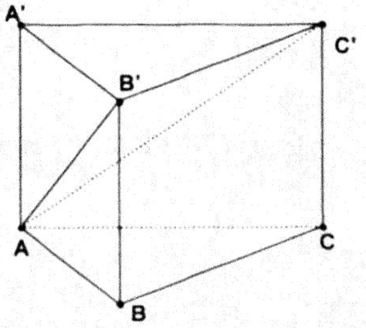
$AH = \frac{2a}{2\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$.



(vì H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow AH = R$, mà theo định lí hàm số Sin trong ΔABC ta có

$R = \frac{BC}{2\sin A} \Rightarrow AH = \frac{2a}{2\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$).

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}\cot\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (đvtt).



19. a. Chứng minh: $\Delta AB'C'$ vuông. Ta có:

$BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow \left.\begin{matrix} BB' \perp B'C' \\ A'B' \perp B'C'(gt) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow B'C' \perp mp(AA'B'B)$

Suy ra: $AB' \perp B'C' \Rightarrow \Delta AB'C'$ vuông tại B'.

b. Hai tam giác AB'C', AB'C chia hình lăng trụ thành 3 hình chóp:

+ Hình chóp B.ACB' (tứ diện vuông).

+ Hình chóp C'.AA'B'.

+ Hình chóp A.CC'B'.

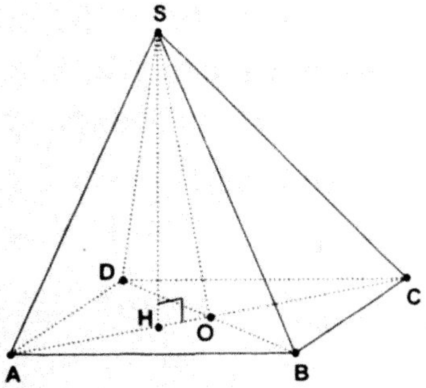
Ta có $V_{BACB'} = \frac{1}{6}abc$ (1) (vì $V_{BACB'} = V_{B'ABC} = \frac{1}{6}abc$)

$V_{C'AA'B'} = \frac{1}{3}S_{\Delta AA'B}C'B' = \frac{1}{6}abc$ (2) $V_{C'AA'B'} = \frac{1}{3}S_{\Delta CC'B'}AB = \frac{1}{6}abc$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $V_{BACB'} = V_{C'AA'B'} = V_{ACC'B'}$ (đpcm).

20. a. Tính diện tích tứ giác ABCD. Ta có ABCD là hình thoi có cạnh bằng 1, vì $\Delta ABC = \Delta SBD$ nên CO = AO = SO. Suy ra: ΔSAC vuông tại S

$\Rightarrow AC^2 = SA^2 + SC^2 \Leftrightarrow 4OA^2 = x^2 + 1$.



Giả sử: $\widehat{BAD} = \alpha$

$$\Rightarrow OA = AB.\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$OB = AB.\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow\ 4\cos^2\frac{\alpha}{2} = x^2 + 1 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = 2\frac{AC.OB}{2} = 2OA.OB = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(1+x^2)(3-x^2)}}{2}.$$

Điều kiện để bài toán có nghĩa $0 < x < \sqrt{3}$. Kẻ $SH \perp BD$.

Vì $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SH \Rightarrow SH = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b. $V_{S\,ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}\ SH = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{(3-x^2)\ (1+x^2)}}{2}.\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{6}x\ \sqrt{3-x^2}$

V_{SABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow x\ \sqrt{3-x^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x\ \sqrt{x^2(3-x^2)}$ lớn nhất

$\Rightarrow x^2 = 3 - x^2$ (ứng dụng bất đẳng thức Cô si) $\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Thể tích của khối tứ diện đều cạnh a là:

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt) B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$ (đvtt)

C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$ (đvtt) D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{10}$ (đvtt).

2. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều SABCD, ABCD là hình vuông cạnh 20, cạnh bên 24. Thể tích của khối chóp là:

A. $V = \dfrac{200\sqrt{94}}{3}$ (đvtt) B. $V = 400\sqrt{94}$ (đvtt)

C. $V = 600\sqrt{94}$ (đvtt) D. Đáp số khác.

3. Trong không gian, cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C'. Biết AB = a, AA' = 2a .Thể tích khối lăng trụ là:

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt) B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt) D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{5}$ (đvtt).

4. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều SABC có đáy là hình vuông cạnh a, các mặt bên là các tam giác đều. Thể tích khối chóp là:

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt) B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt) D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt).

5. Trong không gian, tính thể tích của một khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng *l*.

6. Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích bằng 3. Tính thể tích khối tứ diện ACB'D' .

7. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Tính thể tích của khối chóp biết trung đoạn d = 3 và góc giữa cạnh bên và cạnh đáy $\varphi = 45^0$.

8. Cho hình chóp cụt tam giác đều có cạnh đáy lớn là 2a, đáy nhỏ là a .Góc giữa đường cao với mặt bên là 30^0. Tính diện tích toàn phần của hình chóp cụt .

9. Cho tứ diện SABC có ΔABC đều. Chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác, ΔABC có cạnh 18cm, SO = 14 cm. Tính thể tích của tứ diện .

10. Cho hình chóp SABC có đáy ΔABC là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC). Mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy một góc φ. Tính thể tích khối chóp .

11. Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D' có AA' = h. Trên BB' và DD' lần lượt lấy các điểm M, N sao cho BM = DN = x ($x < \frac{h}{2}$). Mặt phẳng (AMN) chia khối hộp thành hai phần. Tìm tỷ số thể tích của hai phần đó.

12. Cho tứ diện ABCD. Gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD. α là góc giữa 2 đường thẳng đó.

Chứng minh rằng: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d\sin\alpha$.

13. Khối chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Một mặt phẳng (α) đi qua AM và song song với BD, chia khối chóp thành 2 phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó.

14. Cho khối chóp SABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, SA $\perp$ (ABCD), SA = 2a. M là điểm trên cạnh SA với AM = x. Tìm x để mặt phẳng (BCM) chia khối chóp SABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

15. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC). Mặt bên (SBC) làm với mặt đáy một góc φ. Tính theo a và φ thể tích V của khối chóp.

16. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, cạnh bên SA = SB = b, SB = SD = c.

a. Xác định chân đường cao của hình chóp.

b. Tính thể tích của khối chóp theo a,b,c.

17. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi D, E là trung điểm của AB, BC. Nối A' với E, C' với D. Góc tạo bởi A'E và C'D bằng $\frac{\pi}{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ, biết cạnh đáy của tam giác đáy bằng a.

18. Đáy của hình chóp tam giác đều SABC có cạnh bằng $\sqrt{6}$. Các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau. Một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối chóp.

19. Cho hình chóp tam giác SABC có đáy là tam giác đều cạnh a, SA = 2a, SA $\perp$ (ABC). M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Tính thể tích khối chóp ABCNM (Đề thi ĐH năm 2006).

20. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh bên bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và đáy là φ.

a. Tính thể tích V của khối chóp.

b. Tính φ để V lớn nhất.

21. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng 45^0. Tính thể tích hình chóp S.ABCD

22. Cho khối hộp MNPQM'N'P'Q' có thể tích V. Tính thể tích của khối tứ diện P'MNP theo V.

23. Trên cạnh PQ của tứ diện MNPQ lấy điểm I sao cho $PI = \frac{1}{3}PQ$. Tính tỉ số thể tích của hai tứ diện MNIQ và MNIP.

24. Trên cạnh AD của hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a, lấy điểm M sao cho: $AM = x(0 \le x \le a)$. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng hình vuông tại điểm A, lấy điểm S sao cho $SA = y(y > 0)$

a) Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBC)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

c) Tính thể tích khối chóp S.ABCM theo a, y và x.

d) Biết rằng $x^2 + y^2 = a^2$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp S.ABCM.

25. Hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác vuông tại A và $AC = b$, góc $C = 60^0$. Đồng thời đường chéo BC của mặt bên (BB'C'C) tạo với mp(AA'C'C) một góc 30^0.

a) Tính độ dài đoạn AC

b) Tính thể tích của khối lăng trụ

26. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD.

a) Biết AB = a và SA = *l*, tính thể tích khối chóp theo a và *l*.

b) Biết SA = *l* và góc giữa mặt bên và đáy bằng α. Tính thể tích khối chóp theo α và *l*?

27. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD

a) Biết AB = a và góc giữa mặt bên và đáy bằng α, tính thể tích của khối chóp theo a và α.

b) Biết độ dài của đoạn thẳng nối đỉnh hình chóp với trung điểm của một cạnh đáy bằng d và góc giữa cạnh bên và đáy bằng φ, tính thể tích của khối chóp theo d và φ.

28. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đáy đều bằng a. Hơn nữa, góc tạo thành với cạnh bên và mặt đáy là 60^0 và hình chiếu H của đỉnh A lên mp(A'B'C') trùng với trung điểm của cạnh B'C'.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng BC và AC

c) Tính góc giữa mp(ABB'A') và mặt đáy;

d) Tính thể tích của khối lăng trụ.

Hướng dẫn

1. Câu A.

2. Câu A .

Tam giác ABC vuông cân tại B:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 800 \Rightarrow AC = 20\sqrt{2}\ ;\ AO = \frac{AC}{2} = 10\sqrt{2}.$$

Tam giác SOA vuông tại O nên:

$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 376 \Rightarrow SO = 2\sqrt{94}$ Do đó:

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.20^2.2\sqrt{94} = \frac{800\ \sqrt{94}}{3} \text{ (đvtt).}$$

3. Câu A.

Vẽ đường cao AH của tam giác đều ABC. Trong tam giác ABC ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}a\ \frac{a\ \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$

Vậy thể tích khối lăng trụ là:

$$V = B.h = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} \text{ (đvtt).}$$

4. Câu A.

5. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC ta có SO vuông góc với mặt phẳng (ABC); $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tam giác SOB vuông tại O.

SB = l nên $SO^2 = l^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3l^2 - a^2}{3}$.

Điều kiện $3l^2 - a^2 > 0$ ta có $SO = \sqrt{\frac{3l^2 - a^2}{3}}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{3l^2 - a^2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3l^2 - a^2}}{12}$ (đvtt).

6. $V_{A'CB'D'} = V - (V_{A'CB'D'} + V_{ACB'B} + V_{ACD'D} + V_{C'CB'D'})$

$$V_{BAB'C} = \frac{1}{6}V \ ; \ V_{C'CB'D'} = \frac{1}{6}V \ ; \ V_{DACD'} = \frac{1}{6}V.$$

Vậy: $V_{ACB'D'} = V - \frac{4}{6}V = \frac{1}{3}V = 1$.(đvtt).

7. Ta có SI = 3, $\widehat{SAO} = 45^0$. Tam giác SAO vuông tại O nên SO = OA

$\Rightarrow$ tam giác SOI vuông tại O $\Rightarrow$ $SO^2 = SI^2 - OI^2 = 9 - AB^2$.

Từ (1) và (2) suy ra AB $\Rightarrow SO = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

$$V = \frac{1}{3}AB^2.SO = \frac{1}{3}\frac{4.27.\sqrt{2}}{3.\sqrt{2}} = 12 \text{ (đvtt).}$$

8. Kẻ trung đoạn II'. Ta có $AI = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $OI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ A'I'

$= \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow O'I' = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow IJ = OI - OJ = OI - O'I' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác I'JI vuông ở J có $\widehat{II'J} = 30^0$ nên

$II' = 2IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{BCC'B'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đvdt) Vậy:

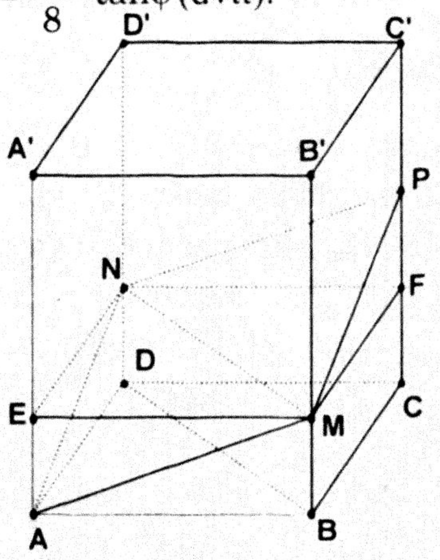
$S_{tp} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{11a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).

9. $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{6}.18.9\sqrt{3} = 378\sqrt{3}$ (đvtt).

10. Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow \widehat{SIA} = \varphi$. ΔSAI vuông tại I

$\Rightarrow SA = AI\ \tan\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ \tan\varphi$.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.S_{đáy}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\ \tan\varphi = \frac{a^3}{8}\ \tan\varphi$ (đvtt).



11. Mặt phẳng (AMN) cắt CC' tại P. Gọi V_1 là thể tích của phần khối hộp giới hạn bởi hai mặt phẳng (ABCD) và (AMPN) và V_2 là thể tích phần còn lại. Ta có MN // BD Qua MN vẽ mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (ABCD), (α) cắt AA' và CC' lần lượt tại E; F.

Dễ thấy AE = CF = FP = x.

Ta có $V_{AEMN} = V_{PFMN}$ nên

$V_1 = V_{ABCDEFMN}$, $V_2 = V_{A'B'C'D'EMFN}$.

Mà ABCDEFMN; A'B'C'D'EMFN là hai khối lăng trụ có chung đáy EMFN và có chiều cao AH, A'H' vuông góc với mặt phẳng (EMFN) nên

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AE}{A'E} = \frac{x}{h-x} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{EMFN}\,AH}{S_{EMFN}\,A'H'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{x}{h-x}$$

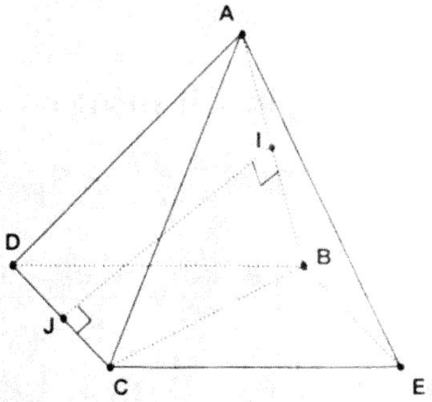
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{x}{h-x}$.

12. Vẽ hình bình hành ABCD. Ta có BE // CD

Nên: $\left(\widehat{AB,\ CD}\right) = \left(\widehat{AB,\ BE}\right) = \widehat{ABE} = \alpha$

(nếu $0 < \widehat{ABE} \le \frac{\pi}{2}$)

Hay $\left(\widehat{AB, CD}\right) = \pi - \widehat{ABE} = \alpha$



(nếu $\widehat{ABE}$ là góc tù).

Do CD// (ABE)

Nên d(CD, (ABE)) = d(CD, AB) = IJ = d

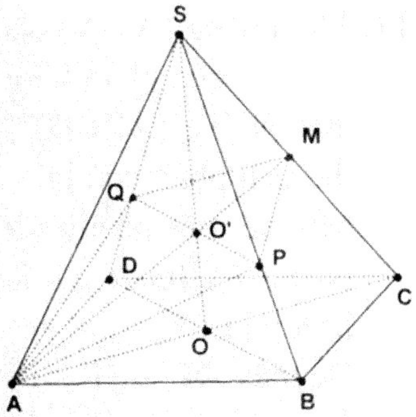
= d(D, (ABE)) = DH ($DH \perp (ABE)$)

Mặt khác $V_{ABCD} = V_{ABEC} = V_{CABE} = V_{DABE}$

$= \frac{1}{3} S_{ABE} DH = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} AB.BE \sin\alpha.DH$

$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD\ d\ \sin\alpha$ (đvtt).

13. Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD, AM cắt SO tại O' là trọng tâm của tam giác SAC. Nên $\frac{SO'}{SO} = \frac{2}{3}$ Mặt phẳng (α) qua AM và song song với BD cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến PQ qua O'và song song với BD. Mặt phẳng (α) chia khối chóp S_{ABCD} thành 2 phần. Một phần là khối chóp S_{APMQ} có thể tích V_1. phần còn lại có thể tích $V_2 = V_{SABCD} - V_1$;



$V_1 = V_{SAPQ} + V_{SPMQ}$

$\frac{V_{SAPQ}}{V_{SABD}} = \frac{SA.\ SP.\ SQ}{SA.\ SB.\ SD} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Suy ra

$V_{SAPQ} = \frac{4}{9} V_{SABD} = \frac{2}{9} V_{SABC}$

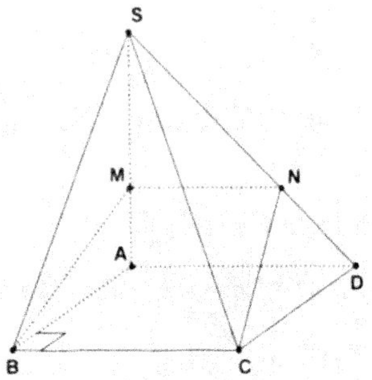
(vì $V_{SABD} = \frac{1}{2} V_{SABCD}$). $\frac{V_{SPMQ}}{V_{SBCD}} = \frac{SP.\ SM\ .SQ}{SB\ .SC\ .SD} = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Suy ra $V_{SPMQ} = \frac{2}{9}.V_{SBCD} = \frac{1}{9}.V_{SABCD}$ (vì $V_{SBCD} = \frac{1}{2}.V_{SABCD}$)

nên $V_1 = \frac{3}{9}.V_{SABCD}$, $V_2 = V_{SABCD} - V_1 = V_{SABCD} - \frac{3}{9}.V_{SABCD}$

$= \frac{2}{3}.V_{SABCD}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

14. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Trong đó MN song song với BC và chia khối chóp thành hai phần:



+ Khối chóp SBCNM có thể tích V_1

+ Khối đa diện ABM.DCN có thể tích V_2

Ta có: $V_2 = \dfrac{1}{3}(AD + BC + MN).\ S_{ABM}$

$= \dfrac{1}{3}(2a + 2a + 2a - x)\dfrac{1}{2}ax = \dfrac{1}{6}(6a - x)ax$

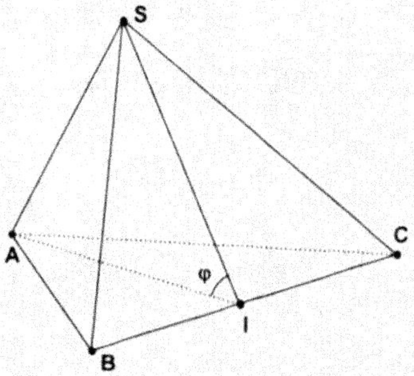
$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}a.\ 2a.\ 2a = \dfrac{4a^3}{3}$

$V_1 = V_2 \Leftrightarrow V_{SABCD} = 2\ V_2 \Leftrightarrow \dfrac{4a^3}{3} = 2\dfrac{(6a - x)\ a\ x}{6}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6ax + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3a - a\sqrt{5} \\ x = 3a + a\sqrt{5} \quad \text{loại} \quad 0 < x < 2a \end{array}\right.$

Vậy giá trị x để mặt phẳng (BCM) chia khối chóp S_{ABCD} ra 2 phần có thể tích bằng nhau là $x = 3a - a\sqrt{5}$.

15. Ta có $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.\ SA$.



Gọi I là trung điểm của BC.

$AI \perp BC$ và $SI \perp BC$

Nên $(\widehat{(SBC), (ABC)}) = \widehat{SIA} = \varphi$.

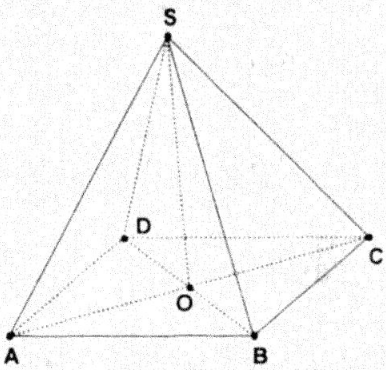
Tam giác SAI vuông tại I.

Cho $SA = AI.\tan\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi$

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi$

Vậy $V = \dfrac{a^3}{8}\tan\varphi$ (đvtt).

16. Xác định chân đường cao của SABCD.



Gọi O là giao 2 đường chéo của hình thoi ABCD. Suy ra O là trung điểm của AC, BD

$SA = SC \Rightarrow SO \perp AC$.

$SB = SD \Rightarrow SO \perp BD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Vậy O là chân đường cao của hình chóp SABCD

b. Tính thể tích của khối chóp SABCD

Đặt OA = x, OB = y, OZ = z

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = 2\,xy;\;\; V = \frac{1}{3}S_{ABCD};\;\; SO = \frac{2}{3}xyz$

Trong các tam giác vuông AOB, SOA, SOB ta có

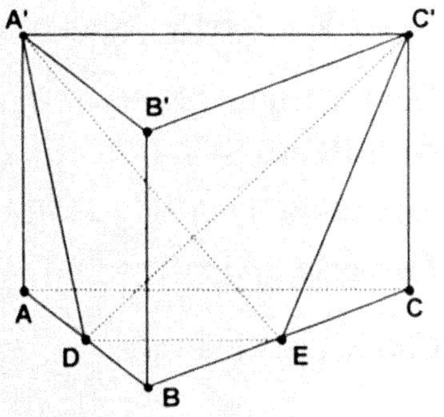
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \\ y^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2) \\ z^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x\,y\,z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)\,(c^2 + a^2 - b^2)\,(b^2 + c^2 - a^2)}$$

Vậy: $V = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)\,(c^2 + a^2 - b^2)\,(b^2 + c^2 - a^2)}$ (đvtt).

17. Do $\widehat{(A'E,\ C'D)} = \frac{\pi}{3}$

A'E, C'D cùng thuộc mặt phẳng nên có 2 khả năng :



a. $\widehat{A'OC'} = \widehat{DOE} = \frac{\pi}{3}$

b. $\widehat{A'OD} = \widehat{C'OE} = \frac{\pi}{3}$

Trường hợp 1:

Ta có A'C'ED là hình thang cân.

Suy ra: $DO = OE = DE = \frac{a}{2}$

và A'O = OC' = A'C'= a.

$\Rightarrow A'E = \frac{3a}{2};\quad S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$

$$AA' = \sqrt{A'E^2 - AE^2} = \sqrt{(\frac{3a}{2})^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy: $V = S_{\Delta ABC}AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ (đvtt).

Trường hợp 2: $\widehat{EA'C'} = \frac{\pi}{6}$. Kẻ ET ⊥ A'C'

$\Rightarrow A'T = \frac{1}{2}(DE + A'C') = \frac{3a}{4}$

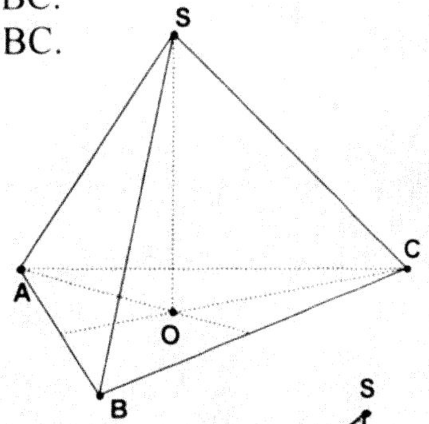
Trong tam giác EA'T ta có: $A'E = \dfrac{A'T}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra A'E = AE vô lí . Vậy $V = \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{8}$ (đvtt).

18. Do các cạnh đáy bằng nhau, diện tích các mặt bên bằng nhau suy ra các đường cao của các mặt bên bằng nhau nên hình chiếu O của đỉnh hình chóp cách đều các cạnh đáy do đó xảy ra 2 trường hợp:

a. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b. O là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC.

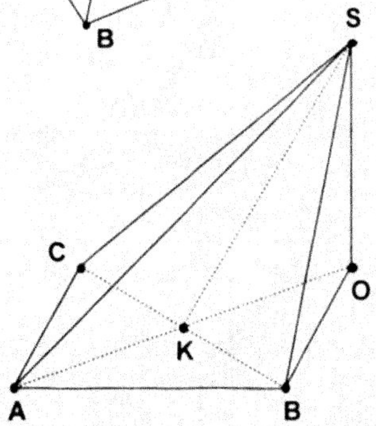


Trường hợp1: Dễ thấy hình chóp đã cho là hình chóp tam giác đều nên:

$SO = SB = SC = 3\sqrt{2} \Rightarrow AO = \sqrt{2}$,

$SO = h = \sqrt{AS^2 - OA^2} = 4$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = 2\sqrt{3}$



Trường hợp 2: Gọi K là trung điểm của BC .Do tam giác ABC đều, suy ra: tam giác SAO vuông tại O nên $SA \neq 3\sqrt{2}$

Vậy $SC = SB = 3\sqrt{2}$

$SO = h = \sqrt{SC^2 - OC^2} = 2\sqrt{3}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.4 = 2\sqrt{3}$

Suy ra $V = 2\sqrt{3}$ (đvtt).

19. $SA \perp (ABC)$ K là trung điểm của BC, SK cắt MN tại H.

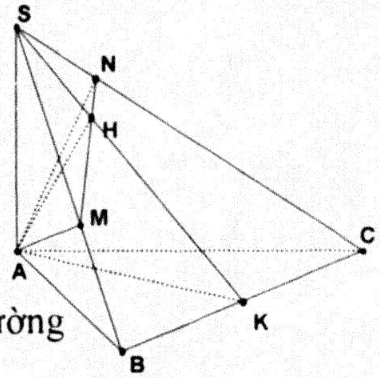
Suy ra $AH \perp SK$

ΔSAK vuông tại A. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SK^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{3}\,a}{\sqrt{19}}$;

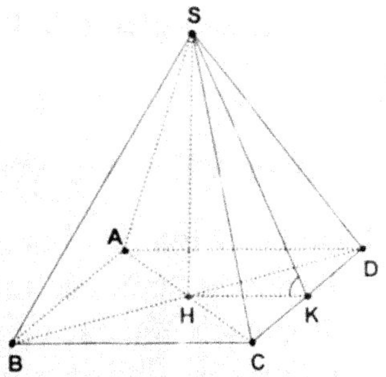
$S_{BCNM} = \dfrac{9}{25} S_{SBC} = \dfrac{9\sqrt{19}\,a^2}{100}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} AH.S_{BCNM} = \dfrac{3\sqrt{3}\,a^3}{50}$ (đvtt).



20. a. Gọi K là trung điểm của CD, H là chân đường cao của hình chóp.

$\Rightarrow \widehat{HKS} = \varphi$. Ta có: $HK = KD = \dfrac{CD}{2}$.



Mặt khác: HK = SK. cosφ

$KD^2 + KH^2 = a^2 \Rightarrow HK^2 = \dfrac{a}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}}$

$\Rightarrow CD = \dfrac{2a}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}}$

$\Rightarrow SH = HK.\tan\varphi = \dfrac{a\ \tan\varphi}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4a^2}{2+\tan^2\varphi}\right).\left(\dfrac{a\tan\varphi}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}}\right) = \dfrac{4}{3}.\dfrac{a^3\tan\varphi}{\sqrt{(2+\tan^2\varphi)^3}}$ (đvtt).

b. Ta có: V lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{\tan\varphi}{\sqrt{(2+\tan^2\varphi)^3}}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan^2\varphi}{(2+\tan^2\varphi)^3}$ lớn nhất ($\tan\varphi > 0$ do φ nhọn)

Mặt khác: $\dfrac{\tan^2\varphi}{2+\tan^2\varphi} + \dfrac{1}{2+\tan^2\varphi} + \dfrac{1}{1+\tan^2\varphi} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\tan^2\varphi}{2+\tan^2\varphi}.\dfrac{1}{2+\tan^2\varphi}.\dfrac{1}{2+\tan^2\varphi} = \dfrac{\tan^2\varphi}{(2+\tan^2\varphi)^3}$ lớn nhất.

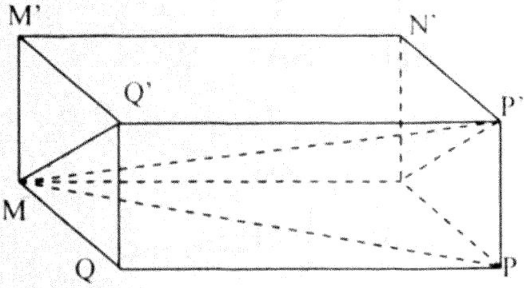
$\Leftrightarrow \dfrac{\tan^2\varphi}{2+\tan^2\varphi} = \dfrac{1}{2+\tan^2\varphi} \Leftrightarrow \tan\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

21. Gọi H là tâm hình vuông ABCD, ta có:

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}B.h; B = a^2, h = SH = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

22. Ta có



$V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = Bh; B = S_{MNPQ}, h = PP'$

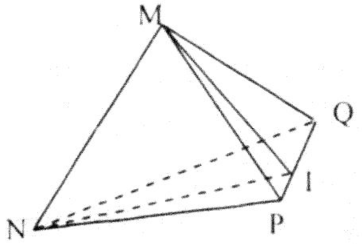
$V_{P'.MNP} = \dfrac{1}{3}B'.h; B' = \dfrac{1}{2}B, h = PP'$

$\Rightarrow V_{P'.MNP} = \dfrac{1}{6}V$.

23. Gọi h là chiều cao kẻ từ M của tứ diện MNPQ.

Ta có $\dfrac{V_{MNIQ}}{V_{MNIP}} = \dfrac{\frac{1}{3}S_{NIQ}.h}{\frac{1}{3}S_{NIP}.h} = \dfrac{S_{NIQ}}{S_{NIP}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}IQ.h_{NQP}}{\frac{1}{2}IP.h_{NQP}} = \dfrac{IQ}{IP} = 2.$



24.a .Ta có $BC \subset (SBC)$

$\left.\begin{matrix} BC \perp AB(GT) \\ BC \perp SA(GT) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

b .Từ M hạ $MH \perp AC$. Mặt khác $MH \perp SA$ (GT) $\Rightarrow MH \perp (SAC)$

Vậy MH là khoảng cách từ M tới mặt phẳng (SAC).

Trong tam giác vuông AMH có: $MH = x.\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}x}{2}$.

c.Hình chóp S.ABCM có đường cao SA = y và có đáy là hình thang vuông nên diện tích đáy là $B = \dfrac{1}{2}a(a+x)$

Do đó thể tích khối chóp S.ABCM là:

$V = \dfrac{1}{3}y.\dfrac{1}{2}a(a+x) = \dfrac{1}{6}ya(a+x)$.

d.Theo giả thiết $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$

Theo kết quả câu c) ta có $V = \dfrac{1}{6}ya(a+x)$ •

$\Rightarrow V^2 = \dfrac{1}{36}a^2(a^2 - x^2)(x+a)^2 = \dfrac{1}{36}a^2(a-x)(a+x)^3$

Gọi $f(x) = V^2$ và coi f(x) là một hàm số của biến x với $0 \le x \le a$, ta có:

$f'(x) = -\dfrac{a^2}{36}(a+x)^3 + \dfrac{a^2}{36}3(a-x)(a+x)^2$

$= \dfrac{a^2(a+x)^2(2a-4x)}{36}$. Từ đó suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{a}{2}$. Khi đó thể tích của khối chóp S.ABCM đạt giá trị lớn nhất là:

$V = \sqrt{f(x)_{max}} = \sqrt{\dfrac{1}{36}a^2\left(a - \dfrac{a}{2}\right)\left(a + \dfrac{a}{2}\right)^3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

25. Ta có $\left.\begin{matrix} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$

$\Rightarrow \widehat{AC'B} = 30^0$ (như hình bên)

Trong tam giác ABC ta có

$AB = AC.tg60^0 = b\sqrt{3}$

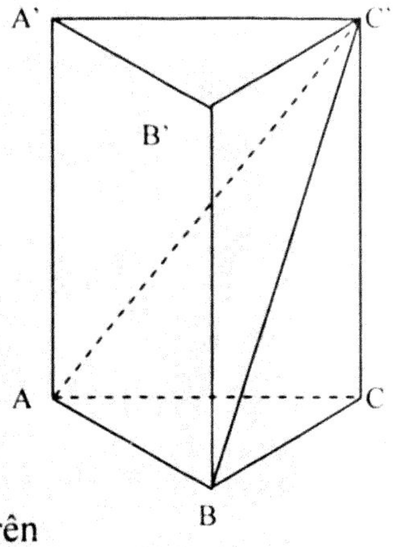
b) Trong tam giác vuông ACC' có

$C'C^2 = C'A^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2.$

Suy ra $C'C = 2\sqrt{2}b.$

Từ đó thể tích của khối lăng trụ ABCA'B'C' bằng:

$V = C'C.\frac{1}{2}.AB.AC = \sqrt{6}b^3.$



26. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng (ABCD).

Vì SA = SB = SC = SD nên HA = HB = HC = HD

Trong tam giác vuông SAH có:

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = l^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2l^2 - a^2}{2}.$$

Suy ra $SH = \frac{\sqrt{2(2l^2 - a^2)}}{2}.$

Do đó thể tích hình chóp S.ABCD bằng:

$$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2(2l^2 - a^2)}}{2}.a^2 = \frac{1}{6}\sqrt{2\left(2l^2 - a^2\right)}.a^2$$

b) Gọi M là trung điểm của CB. Vì tam giác SCB cân (SB = SC) nên $SM \perp CB$, suy ra HM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABCD), từ đó $HM \perp CD$ (theo định lý ba đường vuông góc). Như vậy: $\widehat{SMH} = \alpha$, như hình bên.

Trong tam giác vuông SMB có:

$$SM^2 = SB^2 - MB^2 = \frac{4l^2 - a^2}{4}.$$

Suy ra $SM = \frac{4l^2 - a^2}{4}$ (1)

Trong tam giác vuông SMH có:

$$SM = \frac{HM}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình:

$$\frac{4l^2 - a^2}{4} = \frac{a}{2\cos\alpha} \text{ hay } a = \cos\alpha.\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad (3)$$

Bình phương cả hai vế của (3) ta được:

$$a^2 = \cos^2\alpha\left(4l^2 - a^2\right) \Rightarrow a^2 = \frac{4\cos^2\alpha l^2}{1+\cos^2\alpha} \Rightarrow a = \frac{2l\cos\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}$$

Trong tam giác SHM có:

$$SH = HM.tg\alpha = \frac{l\cos\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}.tg\alpha = \frac{l\sin\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}$$

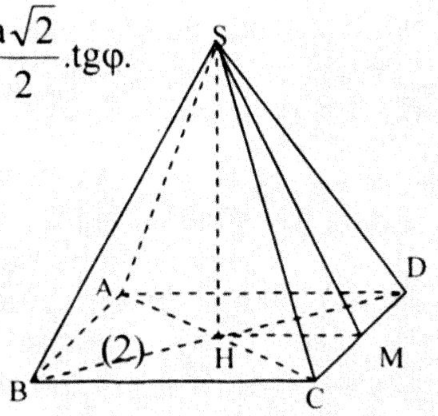
Suy ra $V = \frac{1}{3}.SH.a^2$

$$= \frac{1}{3}.\frac{l\cos\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}.\frac{4\cos^2\alpha l^2}{1+\cos^2\alpha} = \frac{4}{3}\frac{l.\sin\alpha.\cos^2\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{(1+\cos^2\alpha)^2}$$

27. a) Gọi hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng (ABCD) là H, như hình bên

Từ H hạ $HM \perp CD \Rightarrow SM \perp CD$ (theo định lý ba đường vuông góc), suy ra $\widehat{SMH} = \alpha$. Trong tam giác SHM có: $SH = HM.tg\alpha = \frac{atg\alpha}{2}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}.\frac{a.tg\alpha}{2}.a^2 = \frac{a^3tg\alpha}{6}$. Ta có HD là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (ABCD), nên $\widehat{HDS} = \varphi$.



Trong tam giác SHD có: $SH = HD.tg\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}.tg\varphi$.

Suy ra $SH^2 = \frac{a^2.tg^2\varphi}{2}$ (1)

Trong tam giác SHM có:

$$SH^2 = SM^2 - HM^2 = \frac{4d^2 - a^2}{4}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2.tg^2\varphi}{2} = \frac{4d^2 - a^2}{4}$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{4d^2}{2tg^2\varphi + 1} \Rightarrow a = \frac{2d\sqrt{2tg^2\varphi+1}}{2tg^2\varphi+1}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}.SH.BC^2 = \frac{1}{3}.\frac{2d\sqrt{2tg^2\varphi+1}}{2tg^2\varphi+1}.\frac{\sqrt{2}tg\varphi}{2}.\frac{4d^2}{2tg^2\varphi+1}$$

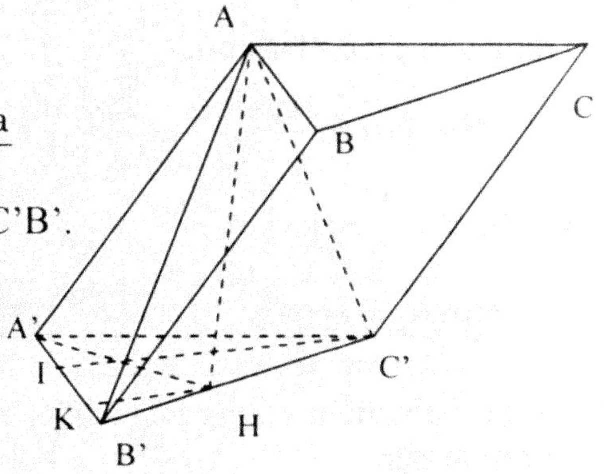
$$= \frac{4\sqrt{2}d^3tg\varphi\sqrt{2tg^2\varphi+1}}{3(2tg^2\varphi+1)^2}.$$

28. a) Ta thấy AH là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Vì A'H là hình chiếu vuông góc của cạnh bên AA' trên mặt phẳng đáy nên $\widehat{AA'H} = 60^0$.

Trong tam giác AA'H có

$$AH = A'H.tg60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$



b) Góc giữa BC và AC là góc AC'B'.

Trong tam giác vuông AHC' có:

$$tg\widehat{AC'B'} = \frac{AH}{HC'} = \frac{3a}{2} : \frac{a}{2} = 3$$

c) Từ H hạ $HK \perp A'B'$. Ta thấy HK là hình chiếu của AK trên mặt phẳng (A'B'C'). Suy ra $AK \perp A'B'$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (ABB'A') và mặt phẳng (A'B'C') là $\widehat{AKH}$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng A'B', ta có $C'I \perp A'B'$ (vì A'B'C' là tam giác đều), suy ra $C'I // HK$.

Vì H là trung điểm của B'C' nên HK là đường trung bình của tam giác B'CI, suy ra $HK = \frac{C'I}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác vuông AKH có: $tgAKH = \frac{AH}{HK} = \frac{3a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

d) Từ các kết quả đã tính được ta có thể tích khối lăng trụ là:

$$V = \frac{3a}{2}.\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Đề kiểm tra cuối chương

(Thời gian 45').

ĐỀ SỐ I

1. Khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' được phân chia thành các khối tứ diện nào sau đây:

A. A A'B'C'; BA'B'C'; CA'B'C'.

B. A' ABC; B'ABC; C'ABC

C. A'BB'C'; B C'CA'; BC'A'A

D. A A'B'C'; B A'B'C'; CC'AB.

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện ACDD'và khối hộp ABCD.A'B'C'D'.

3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SBC) bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

ĐỀ SỐ II

1. Cho khối lăng trụ có thể tích V, chiều cao h, diện tích đáy là S. Diện tích đáy tính theo S là bao nhiêu nếu giữ nguyên thể tích V và chiều cao h tăng lên 3 lần:

A. $\frac{1}{2}S$ B. 3S C. S D. $\frac{1}{3}S$.

2. Khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'có AA' = $a\sqrt{2}$, AB = a. Tính thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D'.

3. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'có A'ABC là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy AB = a, cạnh bên AA' = b. Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (A'BC). Tính $\tan\alpha$ và thể tích khối chóp A'BB'C'C.

ĐỀ SỐ III

Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA bằng 2a, tam giác ABC vuông ở C có cạnh huyền AB = 2a, $\widehat{CAB} = 30°$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB.

1) Tính thể tích khối chóp H.ABC

2) Chứng minh rằng $AH \perp SB$ và $SB \perp (AHK)$

3) Tính thể tích khối chóp S.AHK.

ĐỀ SỐ IV

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có mặt đáy là tam giác ABC vuông tại B và AB = a, BC = 2a, AA' = 3a. Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với CA' lần lượt cắt các đoạn thẳng CC' và BB' tại M và N.

1. Tính thể tích khối chóp C.A'AB.
2. Chứng minh rằng $AN \perp A'B$.
3. Tính thể tích khối tứ diện A'AMN.
4. Tính diện tích tam giác AMN.

Hướng dẫn

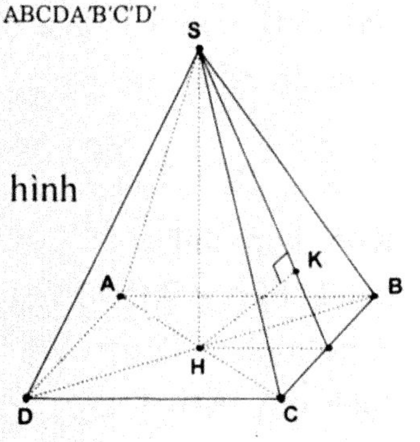
ĐỀ SỐ I

1. Câu C.

2. Gọi h là khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D') ta có

$$V_{ACDD'} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACD}.h = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.S_{ABCD}h = \frac{1}{6}V_{ABCDA'B'C'D'}$$

3. Tính V_{SABCD}



Vì S.ABCD là hình chóp đều nên H là tâm của ABCD. Gọi M là trung điểm BC, K là hình chiếu vuông góc của H lên SM. Ta có:

$BC \perp SH$; $BC \perp HM$

$\Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow (SBC) \perp (SHM)$

Mà $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SBC)$

$\Rightarrow HK = 2IJ = 2b$. Trong tam giác vuông SHM ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{4}{a^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}; V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.dt(ABCD) = \frac{2}{3}\frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}} \text{(đvtt)}$$

ĐỀ SỐ II

1. Câu D.

Giải: Ta có $V = Sh$ suy ra $S = \dfrac{V}{h}$. Gọi S' là diện tích đáy mới khi đó

$$S' = \frac{V}{3h} = \frac{S}{3}$$

2. $V = AA'.S_{ABCD} = AA'.AB.AD$. Mà

$AD^2 = A'C^2 - AB^2 - AA'^2 = 9a^2 - a^2 - 2a^2$

$\Leftrightarrow AD = a\sqrt{6}$

Vậy $V = a\sqrt{2}.a^2\sqrt{6} = 2a^3\sqrt{3}$ (đvtt).

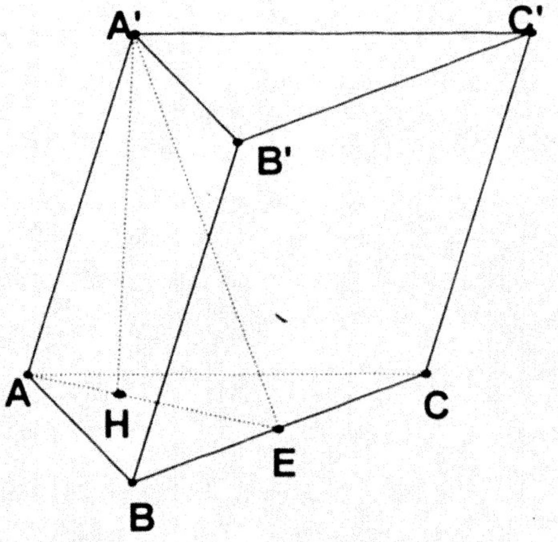
3. Gọi E là trung điểm cạnh BC, H là tâm tam giác đều ABC. Do A'ABC là hình chóp tam giác đều. Nên $\widehat{(ABC, A'B'C')} = \widehat{A'EH}$.

Ta có $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$HE = \dfrac{AE}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2}$

$= \dfrac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}$



$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{A'H}{HE} = \dfrac{2\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{a}$;

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AE = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $V_{A'BB'C'C} = V_{ABCA'B'C'} - V_{A'ABC}$

$= A'H.S_{ABC} - \dfrac{1}{3}A'H.S_{ABC} = \dfrac{2}{3}A'H.S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$ (đvtt).

ĐỀ SỐ III

1. (4 điểm). *Cách 1.*

Trong mặt phẳng (SAC), hạ HI ⊥ AC. Suy ra HI ⊥ (ABC).

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HI$.

Ta có $CA = AB\cos 30 = a\sqrt{3}$. Vậy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 30° = \frac{1}{2}.2a.2a.\cos 30°.\sin 30° = a^2\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{HI}{SA} = \frac{HC}{SC} = \frac{HC.SC}{SC^2} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{4a^2\cos 30°}{4a^2 + 4a^2 + \cos^2 30°} = \frac{3}{7}$$

$\Rightarrow HI = \frac{6}{7}a;$

$$V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}HI = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{6}{7}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{7}$$

Cách 2. $V_{H.ABC} = V_{B.AHC} = \frac{1}{3}S_{AHC}.BC$

2. (3 điểm). Ta có : AH ⊥ SC, AH ⊥ CB (do CB ⊥ (SAO)), suy ra

AH⊥ (SBC) ⇒ AH ⊥ SB.

Ta có: SB ⊥ AK, SB ⊥ AH (do AH ⊥ (SBC)) suy ra SB ⊥ (AHK).

3. (3 điểm). Tam giác SAB cân tại A nên $SK = \frac{1}{2}SB$.

Cách 1. $$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SC}.\frac{SK}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{SH.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SA^2 + SC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2\cos 30°} = \frac{2}{7}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $V_{S.AHK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.\frac{2}{7} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{21}$

Cách 2. $V_{S.AHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.SK$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có thể tính dễ dàng AH, HK và SH. Từ đó ta tính được thể tích khối chóp S.AHK.

ĐỀ SỐ IV

1. (2,5 điểm) $V_{C.A'AB} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.AA' = \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3$.

2. (2,5 điểm). Ta có $CB \perp AB$, $CB \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$), suy ra $CB \perp (A'AB)$. Mặt khác $AN \perp CA'$ (do $CA' \perp (AMN)$) suy ra $AN \perp A'B$ (định lí ba đường vuông góc).

3. (2,5 điểm). Ta có: $V_{A'.AMN} = V_{M.AA'N} = V_{M.AA'B}$ (vì NB // AA')

$$= V_{C.AA'B} \text{(do MC // (AA'B))} = a^3$$

4. (2,5 điểm) $S_{AMN} = \frac{3V_{A'.AMN}}{A'I} = \frac{3.a^3}{\frac{(3a)^2}{\sqrt{a^2+(2a)^2+(3a)^2}}} = \frac{a^2\sqrt{14}}{3}$.

Chương II.

MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. MẶT CẦU

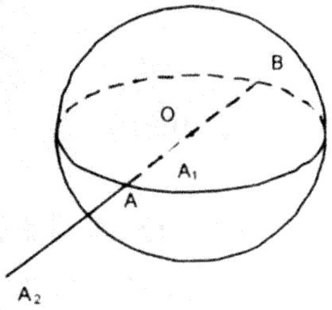
Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa mặt cầu

- **Định nghĩa**

Tập hợp các điểm trong không gian cách đều điểm O cố định một khoảng R cho trước gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R.

- **Các thuật ngữ**



Cho mặt cầu S (O; R) và một điểm A nào đó.

a. Nếu OA = R thì A ∈ S (O; R), lúc đó đoạn thẳng OA gọi là bán kính mặt cầu.

Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB được gọi là đường kính của mặt cầu.

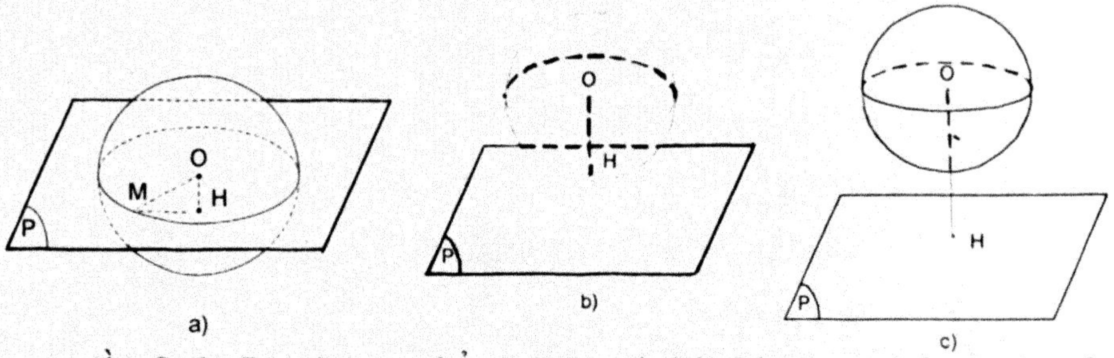
b. Nếu OA < R thì ta nói rằng điểm A nằm trong mặt cầu.

c. Nếu OA > R thì ta nói rằng điểm A nằm ngoài mặt cầu.

d. Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu S(O; R) cùng với các điểm nằm trong mặt mặt cầu đó được gọi là khối cầu S(O; R), hoặc hình cầu S(O; R)

Vậy khối cầu S(O; R) là tập hợp các điểm M sao cho OM ≤ R.

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng.

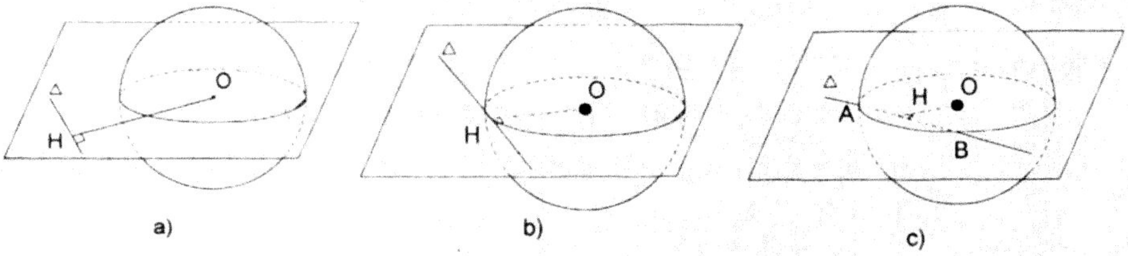


Cho mặt cầu S(O; R) và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ tâm O tới (P) và H là hình chiếu của O trên (P). Khi đó:

- Nếu d < R thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu S(O; R) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
- Nếu d = R thì mặt phẳng (P) chỉ cắt mặt cầu tại điểm H duy nhất. Trong trường hợp này ta bảo "***mặt cầu S(O; R) tiếp xúc với mặt phẳng (P)***".
- Nếu d > R thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu S(O; R).
- **Hệ quả:** Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu S(O; R) tại điểm G là mặt phẳng (P) vuông góc với bán kính OD tại điểm H.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng .

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và d = OH là khoảng cách từ O đến Δ.



- Nếu d > R thì Δ không cắt mặt cầu S(O; R) (Hình a)
- Nếu d = R thì Δ cắt mặt cầu S(O; R) tại điểm duy nhất (Hình b)
- Nếu d > R thì Δ cắt mặt cầu S(O; R) tại hai điểm phân biệt (Hình c).

Khi d = R thì đường thẳng Δ chỉ cắt mặt cầu S(O; R) tại điểm H duy nhất ta bảo "*Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H, hoặc Δ là tiếp tuyến của mặt cầu tại* H"

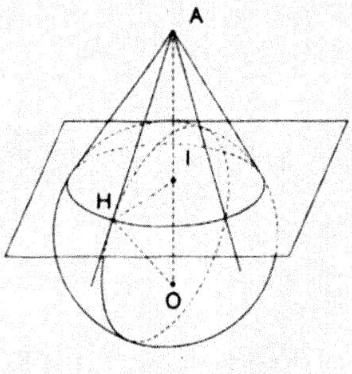
- Điểm H được gọi là điểm tiếp xúc (hoặc tiếp điểm) của Δ và mặt cầu
- **Định lí**

Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O; R) thì:

a. Qua A có vô số điểm tiếp tuyến với mặt cầu

b. Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

c. Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.



4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

* Mặt cầu bán kính R có diện tích S là $S = 4\pi R^2$.

* Khối cầu bán kính R có thể tích là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện.

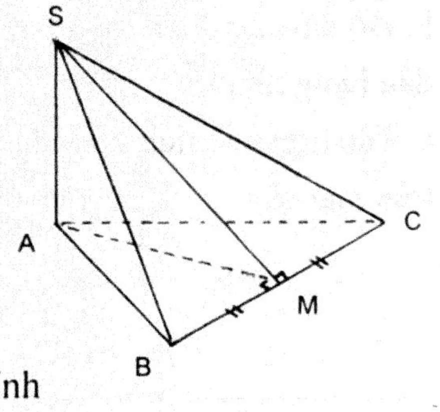
a. *Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp:*

- *Bước 1*: Xác định trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Bước 2: Xác định giao điểm của trục với mặt phẳng trung trực của cạnh bên là I. I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.
- Bước 3: Tính bán kính mặt cầu nếu khối chóp có đỉnh là S thì bán kính mặt cầu là R = SI.

b. *Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ*: Nếu có một mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ thì tâm mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy. Khi đó bán kính mặt cầu là $R = \frac{OO'}{2}$ (O,O' là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy của hình trụ).

c. *Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối hộp:* giả sử cho khốp hộp ABCD.A'B'C'D'. Tâm mặt cầu ngoại tiếp là tâm đối xứng của hình hộp. Bán kính mặt cầu là: $R = \frac{AC'}{2}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC), SA = 2a, đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Tính bán kính mặt cầu tâm S và tiếp xúc với đường thẳng BC.



Giải:

Gọi M là trung điểm BC, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow BC \perp SM$

Vậy mặt cầu tâm S và tiếp xúc BC có bán kính

$R = SM = \sqrt{SA^2 + AM^2}$

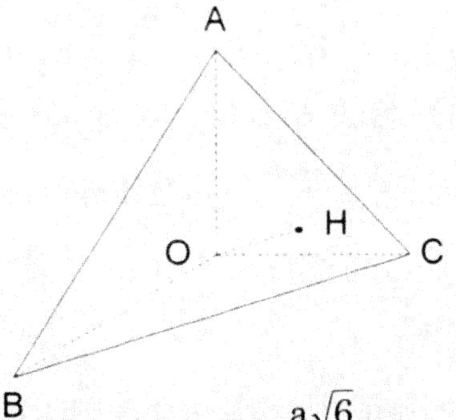
$$= \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $OA = a\sqrt{2}$, tính bán kính mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC).

Giải:

OA, OB, OC bằng nhau và vuông góc từng đôi một

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = BC = CA = OA\sqrt{2} = 2a \\ V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$



Vẽ OH ⊥ (ABC), H ∈ (ABC), ta có:

$$OH = \frac{3V_{OABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{A^3\sqrt{2}}{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với (ABC) có bán kính $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- ***Chú ý***:

1. Nếu mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ thì bán kính mặt cầu bằng khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng Δ.
2. Nếu mặt cầu (S) tiếp xúc với một mặt phẳng (P) thì bán kính mặt cầu bằng khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (P).
3. Trong quá trình tính bán kính mặt cầu. Chúng ta có thể sử dụng tam giác đồng dạng, hệ thức lượng trong tam giác hoặc công thức tính diện tích, công thức tính thể tích.

Dạng 2: Diện tích mặt cầu

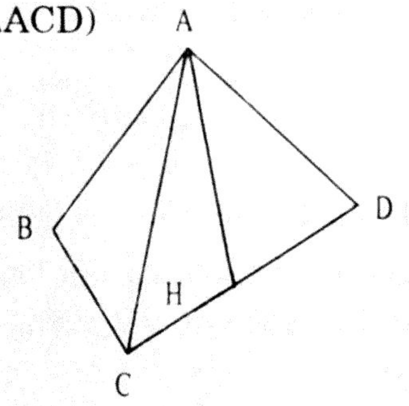
Mặt cầu bán kính R có diện tích $S = 4\pi R^2$

Ví dụ 1: Trong không gian, tính diện tích mặt cầu nội tiếp trong tứ diện đều ABCD cạnh a .

Giải:

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp

$V = \frac{1}{3}(dt\Delta ABC + dt\Delta BCD + dt\Delta ABD + dt\Delta ACD)$



Mặt khác AH là đường cao của tứ diện

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

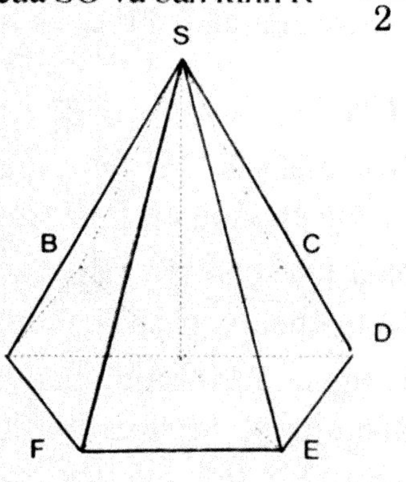
nên thể tích khối tứ diện $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

Suy ra : $r = \frac{\frac{3a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{4a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow S = 4\pi r^2 = 4\pi(\frac{a\sqrt{6}}{12})^2 = \frac{\pi a^2}{6}$ (đvdt).

Ví dụ 2: Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh đáy bằng a và thể tích $V = \frac{3a^2}{2}$. SO là đường cao của hình chóp. Mặt cầu (S) có tâm I ở trên SO, tiếp xúc với đáy ABCDEF và đi qua S. Tính diện tích của mặt cầu (S).

Giải:

Mặt cầu (S) nói ở đề bài có tâm I là trung điểm của SO và bán kính $R = \frac{SO}{2}$



* $S_{ABCDEF} = 6.\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$SO = \frac{3V}{S} = \frac{3.\frac{3a^3}{2}}{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

Vậy bán kính của mặt cầu (S) là $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_C = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$ (đvdt).

Dạng 3: Thể tích khối cầu

Khối cầu có bán kính R có thể tích là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Ví dụ 1: Trong không gian, tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABC có đường cao SA = 1, tam giác đều ABC cạnh bằng 1.

Giải:

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ Gx // SA;

O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC $\Rightarrow O \in Gx$; và O thuộc trung trực của SA trong mặt phẳng (SAG) suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là $R = OA = \sqrt{OG^2 + AG^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

Vậy $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \dfrac{7\pi\sqrt{21}}{54}$ (dvtt).

Ví dụ 2: Trong không gian, cho hình cầu tâm O, đường kính $SS' = 2R$, mặt phẳng vuông góc với SS' cắt mặt cầu theo đường tròn tâm H. Gọi ABC là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn này. Đặt SH = x $(R < x < 2R)$.

a. Tìm giá trị x để SABC là tứ diện đều.

b. Tính thể tích khối tứ diện.

Giải:

a. Ta có

$SA = SB = SC = \sqrt{2Rx};\quad AB = AC = BC = \sqrt{3x(2R - x)}.$

S.ABC là tứ diện đều khi và chỉ khi:

$SA = AB \Leftrightarrow 2Rx = 3x(2R - x) \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}R.$

b. $V = \dfrac{1}{3}SH dt(\Delta ABC);\ SH = x = \dfrac{4}{3}R;\ dt(\Delta ABC) = \dfrac{2}{3}R^2\sqrt{3}.$

$V = \dfrac{8}{27}R^3\sqrt{3}$ (dvtt).

Bài tập vận dụng

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Mặt cầu (S) có tâm ở trên cạnh AA' và tiếp xúc với mặt phẳng (BB'D). Tính thể tích của khối cầu (S).

2. Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC), SA = 2a, đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Tính bán kính mặt cầu tâm S và tiếp xúc với đường thẳng BC.

3. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD), đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SC hợp với đáy (ABCD) một góc bằng α, (S) là mặt cầu tâm A và tiếp xúc với SC. Tính diện tích của mặt cầu (S).

4. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O và AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A, lấy điểm S sao cho SC hợp với mặt phẳng (ABCD) một góc bằng 45°. Gọi (S) là mặt cầu tâm O và tiếp xúc với SC. Tính thể tích của khối cầu (S).

5. Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh đáy bằng a và thể tích $V = \frac{3a^2}{2}$. SO là đường cao của hình chóp. Mặt cầu (S) có tâm I ở trên SO, tiếp xúc với đáy ABCDEF và đi qua S. Tính diện tích của mặt cầu (S).

6. Trong không gian cho ΔABC vuông tại B. Đoạn DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A. Cho AB = 3a, BC = 4a, AD = 5a. Tính bán kính mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D.

7. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với cạnh đáy một góc 60^0. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

8. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với cạnh đáy một góc 60^0. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

9. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với cạnh đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

10. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy là a, chiều cao $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD.

11. Trong không gian, ba cạnh của một tam giác có độ dài là 13, 14, 15.

Một mặt cầu có bán kính bằng 5 tiếp xúc với 3 cạnh tại các điểm nằm trên ba cạnh đó. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng chứa tam giác.

12. Trong không gian, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy $a = \sqrt{3}$, cạnh bên $b = 2$

13. Cho một tam diện SABC vuông có đỉnh S và SA = a, SB = x', SC = x" là hai nghiệm của số phương trình:

$$(3m - 2)x^2 + 2(m + 1)ax + (3m - 2)a^2 = 0 \qquad (1).$$

a. Tìm điều kiện của a và m để cho bài toán có nghĩa.

b. Đặt $\widehat{SAB} = \beta$, $\widehat{SCA} = \gamma$. Viết phương trình nhận tgβ và tgγ làm nghiệm số. Tìm điều kiện của m để β hay γ bằng 45°. Suy ra tính chất các tam giác SAB, SBC, SCD, ABC.

c. Trên SA lấy hai điểm E và F đối xứng nhau qua S. Đặt β = 45°, SE = SF = b và góc phẳng của nhị diện (E, BC, F) = 2k. Tính cos2k theo a và b. Suy ra giá trị của k trong hai trường hợp.

$b = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $b = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

d. Gọi J là trung điểm của BC . Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BCEF có tâm O ở trên SJ. Tính khoảng cách SO và bán kính R của mặt cầu theo a và b.

14. (*Đề thi vào trường ĐHSP TPHCM 95-96*)

Cho góc tam diện Sxyz đỉnh S với $\widehat{xSy} = 120°$, $\widehat{ySz} = 60°$, $\widehat{xSz} = 90°$. Trên các tia Sx, Sy, Sz theo thứ tự lấy các điểm A, B, C sao cho SA = SB = SC = a.

a. Chứng tỏ rằng Δ ABC là một tam giác vuông. Xác định hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (BAC).

b. Tính bán kính hình cầu nội tiếp của tứ diện SABC theo a.

c. Tính góc phẳng của nhị diện (SAC, BAC).

15. Trong mặt phẳng (P) cho một đường thẳng (d) và một điểm A ở ngoài (d). Một góc $\widehat{xAy}$ di động quanh A, cắt (d) tại B và C. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) lấy điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC.

a. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, H, K thuộc một mặt cầu.

b. Tính bán kính mặt cầu trên, biết AB = 2, AC = 3, $\widehat{BAC} = 60°$.

c. Giả sử Δ ABC vuông tại A. Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCHK luôn đi qua một đường tròn cố định khi S thay đổi.

16. Hình chóp SABC có đáy là ΔABC cân. AB = AC = a. Mặt phẳng (SBC) $\perp$ (ABC) và SA = SB = a.

a. Chứng tỏ rằng Δ SBC vuông.

b. Xác định tâm và bán kính của hình cầu ngoại tiếp hình chóp biết SC = x.

17. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Cho biết A'O = a

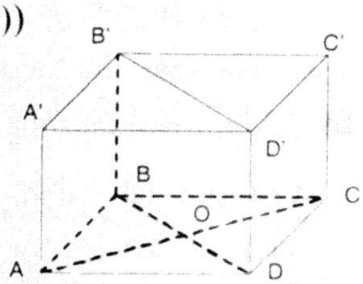
a. Tính diện tích và thể tích của hình cầu ngoại tiếp hình lập phương.

b. Gọi I là tâm của hình lập phương. Hãy tính bán kính của các hình cầu nội tiếp hình lập phương. Hãy xét đặc điểm của các hình cầu này.

Hướng dẫn

1. mp(BB'D) = mp(BB'D'D)

- mặt cầu (S) có bán kính: R = d(I, mp(BB'D'D))



Mà I $\in$ AA' // (BB'D'D) nên

d (I, mp(BB'D'D)) = d (A, mp(BB'D'D)).

Ta có: $\begin{cases} AO \perp BD \\ AO \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AO \perp (BB'D'D)$

$\Rightarrow$ d(A, mp(BB'D'D)) = AO = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy R = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối cầu là: $V_S = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$ (dvtt).

2. Gọi M là trung điểm BC, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA\ (SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Vậy mặt cầu tâm S và tiếp xúc BC có bán kính :

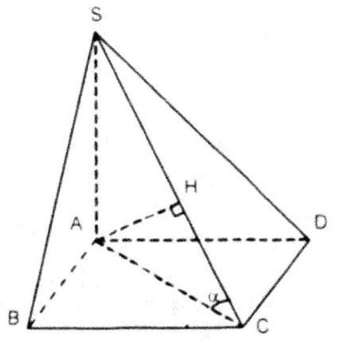
$$R = SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$

3. - Góc hợp bởi SC và (ABCD) là: $\widehat{SCA} = \alpha$

- Vẽ đường cao AH của tam giác SAC, $H \in SC \Rightarrow$ Mặt cầu tâm A tiếp xúc với SC có bán kính là $R = AH = AC.\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha$

Vậy diện tích của mặt cầu nói trên là:

$S_C = 4\pi R^2 = 4\pi(a\sqrt{2}\sin\alpha)^2 = 8\pi a^2\sin^2\alpha$



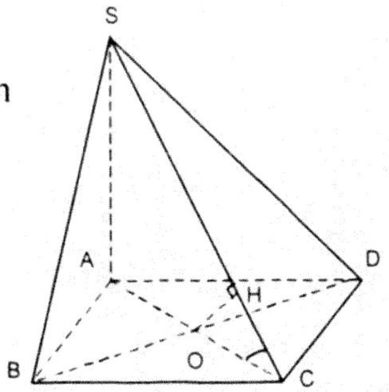
4. Góc hợp bởi SC và (ABCD) là $\widehat{SCA} = 45°$. Vẽ $OH \perp SC$, $H \in SC$.

$\Rightarrow R = OH$ là bán kính của mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với SC.

Tam giác OHC vuông ở H và $\hat{C} = 45°$

$\Rightarrow OH = \dfrac{OC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AC\sqrt{2}}{4}$

$= \sqrt{\dfrac{AB^2 + AD^2}{4}}.\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Vậy thể tích của khối cầu (S) là

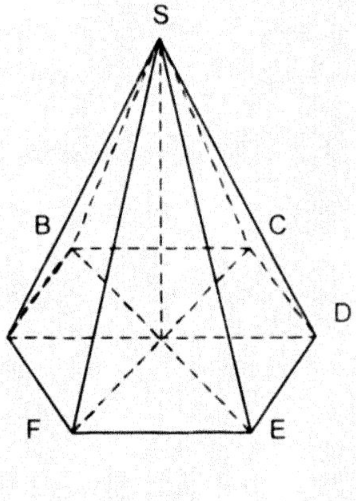
$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).

5. - Mặt cầu (S) nói ở đề bài có tâm I là trung điểm của SO và bán kính:

$R = \dfrac{SO}{2}$

- $S_{đáy.ABCDEF} = 6.\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$SO = \dfrac{3V}{S_{đáy}} = \dfrac{3.\dfrac{3a^3}{2}}{\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.



Vậy bán kính của mặt cầu (S) là $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra diện tích mặt cầu là: $S_C = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$ (đvdt).

6. Mặt cầu qua A, B, C, D có $DA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{DAC} = 90°$ (1)

$\left.\begin{matrix} BC \perp DA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp DB \Rightarrow \widehat{DBC} = 90°$ (2) .

Từ (1) và (2) suy ra A và B nằm trên mặt cầu đường kính DC.

$\Rightarrow$ A, B, C, D ở trên mặt cầu có tâm O là trung điểm DC và bán kính $R = \frac{DC}{2}$.

Ta có: $DC = \sqrt{DB^2 + BC^2} = \sqrt{AD^2 + AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{25a^2 + 9a^2 + 16a^2} = 5a\sqrt{2}$. Vậy $R = \frac{DC}{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

7. Xét hình chóp đều SABCD, ta có $SO \perp (ABCD)$, O là tâm của ABCD, SO là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy là $\widehat{SAO} = 60°$. Trong ΔSAO, trung trực của SA cắt SO tại I, ta có:

$\begin{cases} IS = IA \\ IA = IB = IC = ID \end{cases} \Rightarrow IS = IA = IB = IC = ID$.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp SABCD. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABCD là R = SI. Tứ giác OIJA nội tiếp nên:

$SI.SO = SJ.SA \Leftrightarrow SI = \frac{SJ.SA}{SO}$.

ΔSOA vuông tại O và $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\widehat{SAO} = 60°$ nên

$SA = 2.OA = a\sqrt{2} \Rightarrow SJ = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO = \frac{SA\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $R = SI = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\, a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

8. Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{8\pi a^2}{3}$ (đvdt).

9. Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$ (đvtt).

10. $V = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{24\pi\ a^3\sqrt{6}}{81} = \frac{8\pi\ a^3\sqrt{6}}{27}$ (đvtt)

11. Gọi S là diện tích tam giác và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Ta có theo công thức Hê rông:

$$S = \sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)} = pr.$$

Suy ra:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)\ (b+c-a)}{a+b+c}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12.14.16}{42}} = 4.$$

Gọi I là tiếp điểm đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm H, OH vuông góc với mặt phẳng (ABC). Ta có:

$$OH^2 = OI^2 - IH^2 = R^2 - r^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OH = 3.$$

12. Xét hình chóp tam giác đều S.ABC vẽ SO ⊥ (ABC). Ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ABC ⇒ SO là trục của đường tròn (ABC).

I là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABC ta có: IA = IB = IC = IS

⇒ I ∈ SO, IA = IS nên I ∈ trung trực của SA, trong mp(SAO):

$SI.SO = SJ.SA \Rightarrow SI = \frac{SJ.SA}{SO}$; $SA = 2$, $SJ = \frac{SA}{2}$

$AO = \frac{2}{3}AH = 1$ nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3}$. Vậy $SI = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

13. a. Tìm điều kiện của a và m để bài toán có nghĩa: SA = a > 0

Vì x'; x'' là số đo của BC nên x'> 0, x'' > 0

Do đó phương trình (1) phải có hai nghiệm dương

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4m-1)(-2m+3)a^2 \geq 0 \\ -2\dfrac{m+1}{3m-3}.a < 0 \\ a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq m \leq \frac{2}{3}.$$

b. Trong Δ vuông ASB: $tg\ \beta = \frac{a}{x'}$. Trong Δ vuông ASC

$$tg\ \gamma = \frac{a}{x''} \Rightarrow \begin{cases} tg\beta + tg\gamma = \dfrac{a}{x'} + \dfrac{a}{x''} \\ tg\beta.tg\gamma = \dfrac{a^2}{x'.x''} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = -2.\dfrac{m+1}{3m-2} \\ P = a^2 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình cần tìm là: $X^2 + \frac{2(m+1)}{3m-2}X + 1 = 0$.

Giả sử $\beta = 45° \Rightarrow tg\ \beta = 1 \Rightarrow X = 1$ là nghiệm số của phương trình nên: $1 + \frac{2(m+1)}{3m-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Lúc này x' = x'' = a (câu 1). Do đó : $\beta = \gamma = 45°$.

$\Rightarrow \Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCA$ hoặc ΔABC đều cạnh $a\sqrt{2}$.

c. Ta có $\beta = 45° \Rightarrow \begin{cases} SA = SB = a \\ AB = AC = BC = a\sqrt{2} \text{ (câu 2)} \end{cases}$

Gọi J là trung điểm của BC, Δ SBC vuông cân suy ra

$SJ \perp BC;\ SJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\left.\begin{matrix} SJ \perp BC \\ ES \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (EIS) \Rightarrow BC \perp FJ \Rightarrow sd(E, BC, F) = 2k = \widehat{EJF}$.

Ta có: ΔAJF cân (JS là đường trung tuyến và đường cao) suy ra $\widehat{AJS} = k$. Trong Δ vuông ESJ

$$tg\ k = \frac{SE}{SJ} = \frac{h}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{a};\ \cos 2k = \frac{1 - tg^2k}{1 + tg^2k} = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + 2b^2}.$$

$$\text{Khi } b = \frac{a\sqrt{6}}{2} : tgk = \frac{b\sqrt{2}}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{12}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow k = 60°$$

$$\text{Khi } b = \frac{a\sqrt{6}}{6} : tgk = \frac{b\sqrt{2}}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{12}}{6}}{a} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow k = 30°.$$

d. Tâm và bán kính hình cầu EFBC

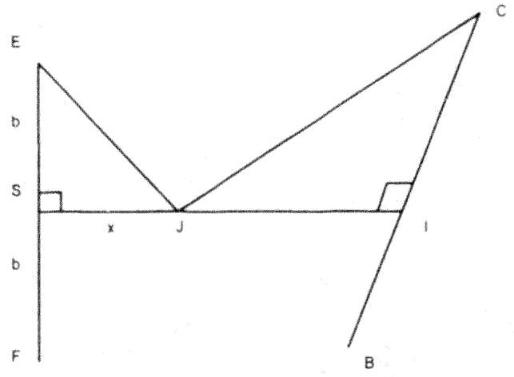
SJ là đường trung trực chung của hai đoạn BC là EF.

Giả sử $O \in SJ$ suy ra $\begin{cases} OB' = OC \\ OE = OF \end{cases}$

Nếu ta chọn sao cho OC = OE thì O cách đều 4 điểm B, C, E, F. Do đó ta dựng mặt trung trực của đoạn EC, nó cắt đường SJ tại điểm O. Đặt SO = x

Ta có: $OE^2 = SO^2 + SE^2 = x^2 + b^2$

$$OC^2 = JC^2 + OJ^2$$
$$= (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2} - x)^2$$
$$= a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}.$$



Để OE = OC thì $OE^2 = OC^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + b^2 = a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{2}}{2a}$$
$$R = x^2 + b^2 = \frac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 2a^2b^2}{2a^2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2a^2}}.$$

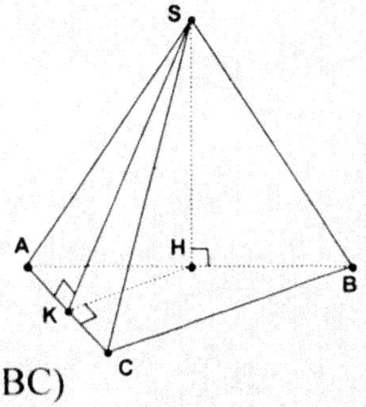
14. a.Chứng minh rằng ΔABC vuông

Ta có: $SA = SC$; $\widehat{ASC} = 1v$ (gt) $\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại S.

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2$

- $SC = SB$ (gt); $\widehat{CSB} = 60° \Rightarrow \Delta CBS$ đều $\Rightarrow BC^2 = a^2$
- Áp dụng định lí hàm số cosin vào ΔASB

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2AS.SB\cos 120°$$
$$\Rightarrow AB = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$



Do đó: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Suy ra ΔABC vuông tại C.

* Ta có SA = SB = SC

H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow$ H là tâm đường tròn (ABC)

ΔABC vuông tại C $\Rightarrow$ H là trung điểm AB.

b. Tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện SABC

Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện SABC

Ta có : $V = \frac{1}{3}S_{tp}.r \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}}$ (1)

* V là thể tích tứ diện $V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CA.CB.SH = \frac{1}{6}.a\sqrt{2}.a.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

* S_{tp} là diện tích toàn phần của tứ diện:

$S_{tp} = S_{ABC} + S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SCB}$

$$= \frac{1}{2}CA.CB + \frac{1}{2}SA.SB\sin 120° + \frac{1}{2}SC.SB\sin 60° + \frac{1}{2}.SA.SC\ .$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a + \frac{1}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}.a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}\right)a^2\ .$$

Do đó $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}$.

c. Ta có:

$$\left.\begin{aligned} &HK \perp AC \\ &SH \perp (ABC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow SK \perp AC \Rightarrow (\widehat{SAC, BAC}) = \widehat{SKH}$$

Trong Δ vuông SHK: $tg\widehat{SKH} = \dfrac{SH}{HK}$ (1)

* SK ⊥ AC (cmt); Δ SAC cân ⇒ K là trung điểm AC

⇒ HK là đường trung bình Δ ABC ⇒ $HK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$. Do đó

$tg\,\widehat{SKH} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1$. Vậy $\widehat{SKH} = 45°$.

15. Chứng minh 5 điểm A, B, C, H, K thuộc mặt cầu.

Ta dựng đường kính AD của đường tròn (ABC).

Ta có: DB ⊥ AB (B ∈ đường tròn đường kính AD) SA ⊥ DB (gt)

⇒ BD⊥ (ASB)

AH ∈ (SAB)

⇒ BD ⊥ AH; SB ⊥ AH

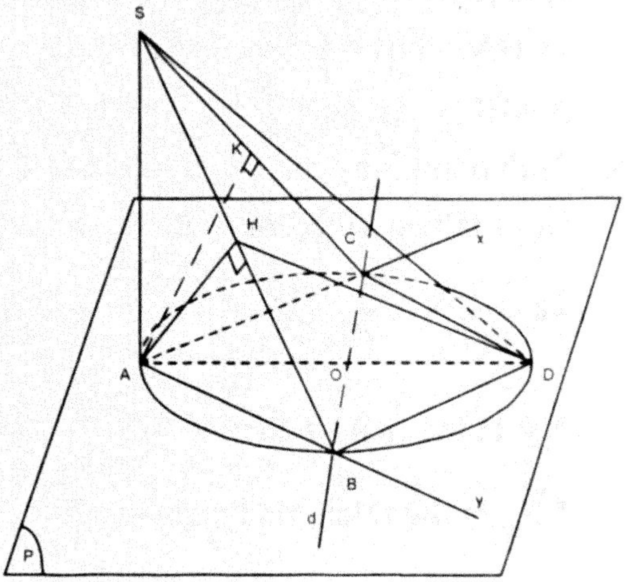
⇒ AH ⊥ (SBD) ⇒ AH ⊥ HD

⇒ $\widehat{AHD}$ = 1v (1).

Tương tự AK ⊥ (SCD)

⇒ AK ⊥ KD

⇒ $\widehat{AKD}$ = 1v (2)



Từ (1) và (2): B, C, H, K cùng nhìn AD dưới một góc 90°

$\Rightarrow$ B, H, K, A, C cùng nằm trên một mặt cầu.

b. Tính bán kính R của mặt cầu:

Gọi O là tâm đường tròn (ABC) do đó O cũng là tâm mặt cầu qua các điểm trên.

Ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A}$.

* $\sin A = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

* $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^\circ = 4 + 9 - 2 \,.\, 2.\, 3 \,.\, \dfrac{1}{2} = 7$

$\Rightarrow BC = \sqrt{7}$. Do đó $R = \dfrac{\sqrt{7}}{2\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

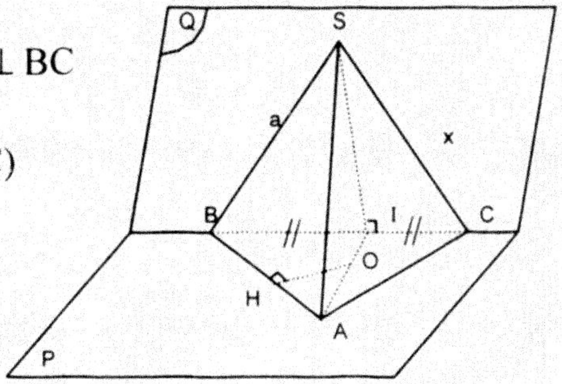
c. Giả sử Δ ABC vuông tại A. Chứng minh mặt cầu ngoại tiếp ABCHK luôn đi qua một đường tròn cố định. Δ ABC vuông tại A

$\Rightarrow$ BC là đường kính mặt cầu ngoại tiếp ABCHK. Kẻ AA' $\perp$ (d)

$\Rightarrow$ A' cố định. Ta có: $\left.\begin{array}{l}(d) \perp AA' \\ (d) \perp SA\end{array}\right\} \Rightarrow (d) \perp (SAA') \Rightarrow BC \perp (SAA')$

Mà mặt phẳng (SAA') cố định, vuông góc với đường kính BC của mặt cầu nên cắt mặt cầu theo một đường tròn tâm A' bán kính AA' và đường tròn này cố định.Vậy mặt cầu qua A, B, C, H, K luôn chứa đường tròn (A', AA') cố định.

16. Chứng tỏ rằng ΔSBC vuông.



$\left.\begin{array}{l}\text{Gọi I là trung điểm BC} \\ \Delta\text{ABC cân tại A (gt)}\end{array}\right\} \Rightarrow AI \perp BC$

Mà $(ABC) \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp (SBC)$

$\Rightarrow AI \perp SI$

Xét ΔSIA và ΔBIA

$\left.\begin{array}{l}IB = IS \\ IB = IC\end{array}\right\} \Rightarrow IB = IC = IS$. Vậy ΔSBC vuông tại S.

b. Xác định tâm và bán kính của hình cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: I là trung điểm của BC, ΔSBC vuông tại S ⇒ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC; AI ⊥ BC (tính chất tam giác cân)

⇒ AI là trục đường tròn (SBC) ⇒ O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC nằm trên AI. Mặt khác O cách đều A và B ⇒ O được xác định và chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

* Trong Δ vuông SBC $\begin{cases} BC^2 = SB^2 + CS^2 = a^2 + x^2 \\ BI = \dfrac{BC}{2} \end{cases} \Rightarrow BI = \dfrac{a^2 + x^2}{4}$

* Trong Δ vuông AHB: $AI^2 = BA^2 - BI^2$.

$= a^2 - \dfrac{a^2 + x^2}{4} = \dfrac{3a^2 - x}{4}$.

$\Rightarrow AI = \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$ (điều kiện $0 \le x \le a\sqrt{3}$).

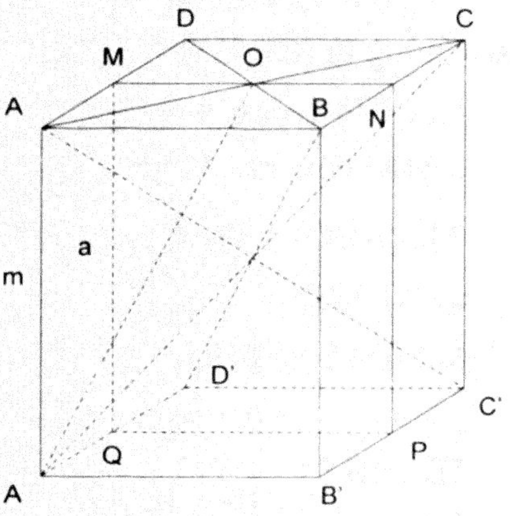
Gọi H là trung điểm của AB. Tứ giác HBIO nội tiếp được

Ta có: $AO.AI = AH.AB \Rightarrow R = AO = \dfrac{AB}{2AI}$.

$\Rightarrow R = \dfrac{a^2}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{3a^2 - x^2}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$.

Vậy $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$ (với $0 \le x \le a\sqrt{3}$).

17. Ta gọi x là độ dài của cạnh lập phương



Ta có: $OA'^2 = OA^2 + AA'^2$

$\Leftrightarrow a^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3x^2}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hình trụ ngoại tiếp hình lập phương có bán kính $r = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

- Thể tích hình trụ ngoại tiếp hình lập phương

$V_{trụ} = \pi r^2 h = \pi(\dfrac{a\sqrt{3}}{3})^2 \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \pi \dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$ (đvtt).

b. Hình cầu ngoại tiếp hình lập phương có bán kính $R = IA = \frac{AC'}{2}$.

Mà $AC' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (đường chéo hình lập phương cạnh x).

Từ hai điều trên suy ra $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Diện tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương:

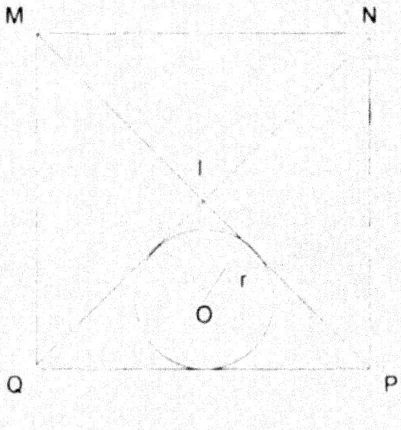
$$S = \frac{4}{3}pR^2 = \frac{4}{3}p\frac{a^2}{2} = \frac{2pa^2}{3} \text{ (đvdt).}$$

Thể tích hình cầu ngoại tiếp hình lập phương:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt).}$$

c. Ta hãy cắt hình lập phương bởi một mặt phẳng (α) qua I và song song với mặt phẳng (ABB'A') của hình lập phương. Mặt phẳng (α) sẽ cắt hình lập phương theo hình vuông MNPQ và cắt hình chóp đỉnh S theo các giao tuyến là Δ vuông cân tại I (hình 2). Ta nhận thấy các hình chóp đều bằng nhau nên các hình cầu nội tiếp của các hình chóp trên cũng bằng nhau. Mặt phẳng (α) cắt các hình cầu theo giao tuyến là các đường tròn và các tam giác vuông cân nói trên. Gọi S là diện tích Δ IOP, r là bán kính các hình cầu nội tiếp hình chóp.

$$\text{Ta có} \begin{cases} S = pr \\ 2p = PQ + QI + IP = x(1+\sqrt{2}). \\ S = \dfrac{x^2}{3} \end{cases}$$



$$\text{Suy ra } r = \frac{S}{P} = \frac{x^2}{4} : x(1+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{12(1+\sqrt{2})}.$$

Vậy chúng ta có tất cả là sáu hình cầu bằng nhau. Mỗi hình cầu này tiếp xúc với hình cầu lân cận và tiếp xúc với một mặt bên của hình lập phương.

§2. MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

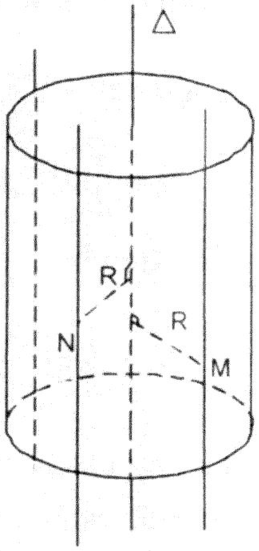
Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa mặt trụ

- Tập hợp các điểm M trong không gian cách đường thẳng Δ cố định một khoảng cách không đổi R > 0 gọi là mặt trụ tròn xoay, hoặc đơn giản là mặt trụ.

- Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt trụ, R gọi là bán kính của mặt trụ. Như vậy mặt trụ hoàn toàn được xác định nếu biết trục Δ và bán kính R của nó. Ta kí hiệu mặt trụ T(Δ; R).

- Nếu một đường thẳng d song song với Δ và cách Δ một khoảng bằng R thì đường thẳng d nằm trên mặt trụ T(Δ; R). Các đường thẳng d như thế gọi là đường sinh của mặt trụ.

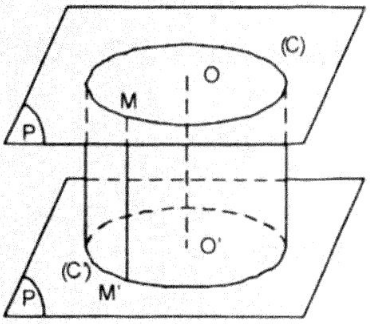


Vậy mặt trụ là hình tạo bởi các đường thẳng song song và cách đều đường thẳng Δ một khoảng bằng R.

2. Hình trụ và khối trụ

- Cắt mặt trụ T(Δ; R) bởi hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P′) cùng vuông góc với Δ, ta được hai đường tròn (C) và (C′). Hai đường tròn đó xác định hai hình tròn (C) và (C′).

3. - Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P′) cùng hai hình tròn (C) và (C′) được gọi là hình trụ.



* Hai hình tròn (C) và (C′) gọi là hai mặt đáy của hình trụ, bán kính R của chúng gọi là bán kính của hình trụ. Khoảng cách giữa hai đáy gọi là chiều cao của hình trụ.

* Nếu O và O′ là tâm của hai hình tròn đáy thì đoạn thẳng OO′ (nằm trên Δ) gọi là trục của hình trụ.

* Phần mặt trụ nằm giữa hai đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

* Với mỗi điểm M ∈ (C) có một điểm M′ ∈ (C′) sao cho MM′ // OO′. Lúc đó đoạn MM′ nằm trên mặt xung quanh của hình trụ, có độ dài bằng chiều cao của hình trụ, các đoạn thẳng MM′ gọi là đường sinh của hình trụ.

* Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là khối trụ xác định bởi hình trụ đó.

* Khối trụ xác định bởi hình trụ T gọi tắt là khối trụ T.

4. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ

* Một hình lăng trụ gọi là nội tiếp hình trụ nếu hai đáy của lăng trụ nội tiếp hai đáy của hình trụ. Khi đó ta còn gọi hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

* Diện tích xung quanh của hình T là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp T khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn. Thể tích của khối trụ T là giới hạn của thể tích khối trụ đều nội tiếp T khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

* Diện tích xung quanh của hình trụ bằng chu vi đáy nhân với chiều cao. Thể tích của khối trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

* Diện tích xung quanh của hình trụ T là: $S_{xq} = 2\pi Rh$.

* Diện tích toàn phần của hình trụ T là: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$.
hay $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

* Thể tích của khối trụ T là: $V = \pi R^2 h$.

Bài tập vận dụng

1. Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có 2 cạnh AB, CD lần lượt là các dây cung của 2 đường tròn đáy. Cạnh AD, BC không phải là đường sinh của hình trụ. Tính độ dài cạnh hình vuông ABCD

A. $\frac{R\sqrt{10}}{4}$ B. $\frac{R\sqrt{10}}{3}$ C. $\frac{R\sqrt{10}}{2}$ D. $R\sqrt{10}$.

2. Cho hình trụ có bán kính R, trục OO' bằng 2R và mặt cầu S có đường kính OO'. Gọi diện tích xung quanh của mặt cầu là Sxqc, diện tích xung quanh của hình trụ là Sxqt. Khi đó :

A. $S_{xqc} = S_{xqt}$ B. $S_{xqc} = 2S_{xqt}$ C. $S_{xqc} = \frac{1}{2}S_{xqt}$ D $S_{xqc} = \frac{1}{3}S_{xqt}$

3. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục cùng hình trụ một khoảng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ bị cắt bởi mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{R^2\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4R^2\sqrt{5}}{3}$.

4. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có cạnh bên AA' = 2a, đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền BC = $2a\sqrt{3}$. Thể tích khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho là:

A. $V = 6\pi a^2$ B. $V = 4\pi a^2\sqrt{3}$ C. $V = 8\pi a^3\sqrt{2}$ D. $V = 5\pi a^3$.

5. Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a và mặt bên AA'B'B là hình vuông. Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C'. Tính diện tích toàn phần của hình trụ .

6. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có cạnh bên AA'= 3a, đáy ABC là tam giác vuông ở A với AB = 3a, AC = 4a. Hình trụ T nội tiếp ABC.A'B'C' (T có hai đáy lần lượt là hai hình tròn nội tiếp tam giác ABC và tam giác A'B'C'). Tính thể tích của khối trụ T .

7. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và AA'C'C cũng là hình vuông. Hình trụ nội tiếp hình hộp chữ nhật đã cho (hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai đáy của hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D'). Tính diện tích xung quanh của hình trụ

8. Cho hình lập phương có cạnh bằng a là hình trụ ngoại tiếp hình lập phương đã cho. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối lập phương và khối trụ .Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

9. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a và AA'C'C là hình vuông. Cho hình trụ ngoại tiếp ABCD.A'B'C'D' (Hai đáy của hình trụ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp ABCD và A'B'C'D') . Tính diện tích xung quanh của hình trụ .

10. Cho hình lăng trụ lục giác đều ABCEF. $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ có các cạnh đáy bằng a và mặt bên AA'B'B là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$ Cho hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ nói trên. Tính thể tích của khối trụ .

11. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và AC = a. Cho hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp ABCD và A'B'C'D'. Tính bán kính đáy của hình trụ .

12. Một hình trụ có diện tích xung quanh là S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng a. Tính thể tích khối trụ .

13. Một hình trụ có diện tích xung quanh là S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng a. Tính diện tích thiết diện qua trục của hình trụ .

14. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ .

15. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông. Một mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ cắt đáy hình trụ theo dây cung bằng bán kính đáy hình trụ. Tính diện tích thiết diện của hình cầu ngoại tiếp hình trụ khi cắt bởi mặt phẳng (P) .

16. Cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, BC = 2a và đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABCD), $\Delta // AD$ và đường thẳng Δ cách AD một khoảng x, Δ không có điểm chung với (ABCD). Tính thể tích của hình tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật ABCD quanh đường thẳng Δ.

17. Cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, BC = 2a và đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABCD), $\Delta // AD$ và Δ cách AD một khoảng x, Δ không có điểm chung với (ABCD). Tính giá trị x để thể tích câu 16 gấp 3 lần thể tích khối cầu có bán kính bằng cạnh AB (OA > OB)

18. Cho hình lăng trụ lục giác đều ABCDEF. A'B'C'D'E'F'cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h. Tính thể tích khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ .

19. Cho hình lăng trụ lục giác đều ABCDEF. A'B'C'D'E'F'cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h. Tính thể tích khối trụ nội tiếp hình lăng trụ .

20. Cho hình trụ có trục O_1O_2. Một mặt phẳng (α) song song với trục cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm của thiết diện đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD bằng bán kính đường tròn đáy của hình trụ. Tính số đo $\widehat{O_1OO_2}$.

21. Cho hình trụ có chiều cao và bán kính đáy cùng bằng a

a. M, N là hai điểm lấy trên hai đường tròn đáy sao cho MN tạo với trục của hình trụ một góc φ. Tính khoảng cách từ trục của hình trụ đến đường thẳng MN.

b. Một mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Tính khoảng cách từ trục của hình trụ đến mặt phẳng (α).

c. Một mặt phẳng (β) không song song với trục của hình trụ và cắt hình trụ theo một thiết diện là hình vuông. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (β) với trục của hình trụ.

22. Một hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{3}$. A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc tạo bởi AB và trục của hình trụ bằng $30°$.

a. Tính diện tích của thiết diện qua A và song song với trục của hình trụ.

b. Tính góc giữa hai bán kính qua A và B.

c. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và trục của hình trụ.

23. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy a và đường cao h

a. Tính diện tích xung quanh và thể tích khối trụ nội tiếp lăng trụ.

b. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng A'I cắt hình trụ nội tiếp trong câu (a) theo một đoạn thẳng. Tính độ dài đoạn thẳng này.

24. Cho một hình trụ tròn xoay đáy là đường tròn (O) và (O') có bán kính bằng 3 đơn vị, chiều cao của hình trụ là 4 đơn vị. Gọi AB là một đường kính cố định của (O). M là một điểm lưu động trên (O'). Gọi MC là đường sinh qua C, C ở trên đường tròn (O). Kẻ HC vuông góc với AB và đặt AH = x.

a. 1). Chứng minh rằng tổng số bình phương các cạnh của hình chóp MABC là một hằng số.

2). Tính MH theo số x.

3). Định vị trí của M để cho diện tích S của tam giác MAB cực đại

4). Tính thể tích V của hình chóp MABC. Chứng tỏ rằng V cực đại khi S cực đại.

b. Định x để V = 4k (k là một số cho sẵn)

25. Cho hình trụ tròn xoay bán kính đáy R, đường cao OO' = h (O và O' là tâm của hai đáy). AB là một đường kính lưu động của đường tròn (O); CD là một đường kính cố định của đường tròn (O'). Gọi α là góc giữa AB và CD.

a. Tính diện tích ΔACD và góc φ do mặt phẳng (ACD) tạo với mặt phẳng đáy (O') theo R, h, a.

b. Với giá trị nào của α thì ABCD có thể tích lớn nhất.

26. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cắt nó theo thiết diện ABA_1B_1. Biết một cạnh của thiết diện là dây cung của đường tròn đáy căng một cung 120 và diện tích xung quanh hình trụ là 4π. Tính

a. Diện tích toàn phần của hình trụ.

b. Diện tích thiết diện ABA_1B_1

c. Thể tích của khối trụ.

d. Thể tích khối lăng trụ n – giác đều nội tiếp hình trụ.

e. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ.

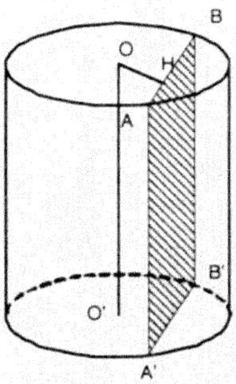
Hướng dẫn

1. Câu C.

Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu của C, D trên mặt đáy chứa AB thì ABC'D' là hình chữ nhật suy ra AC' = 2 R. Từ các tam giác vuông ABC' và CBC' ta có:

$$BC'^2 = 4R^2 - AB^2 = BC^2 - CC'^2 = AB^2 - R^2$$

$$\Rightarrow 2AB^2 = 5R^2 \Leftrightarrow AB = \frac{R\sqrt{10}}{2}.$$



2. Câu A.

3. Câu B.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABB'A')$$

$$\Rightarrow d\,(OO', (ABB'A')) = OH = \frac{R}{2}.$$

* Tam giác OHA vuông ở H, ta có:

$$HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2.HA = R\sqrt{3}.$$

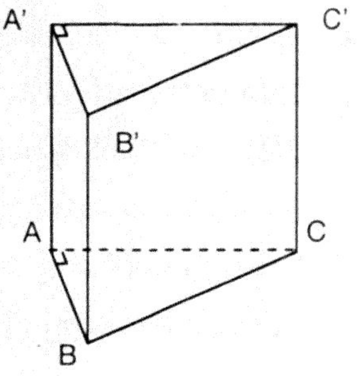
$$S_{ABB'A'} = AB.AA' = R\sqrt{3}.\frac{3R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

4. Câu A.

Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C' có:

Hai đáy là hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác ABC và A'B'C'

Chiều cao là cạnh bên AA'



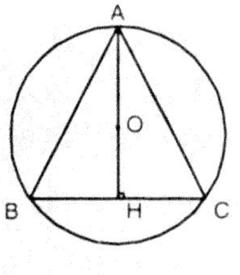
Vậy hình trụ nói trên có bán kính đáy là:

$R = \frac{BC}{2} = a\sqrt{3}$ và chiều cao $h = 2a$.

$\Rightarrow$ Thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h = \pi(a\sqrt{3})^2.2a = 6\pi a^3 \text{ (đvtt)}.$$

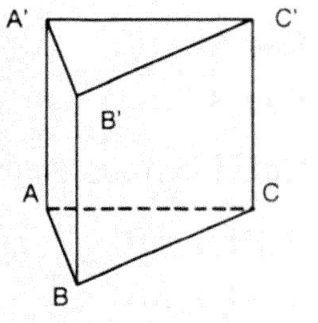
5. Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ ABC.A'B'C' có: Hai đáy là hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác ABC và tam giác A'B'C'. Chiều cao bằng cạnh bên.



Vậy hình trụ nói trên có: Bán kính đáy là:

$$R = AO = \frac{2}{3}.AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chiều cao $h = AA' = a \Rightarrow$ Diện tích toàn phần của hình trụ là:

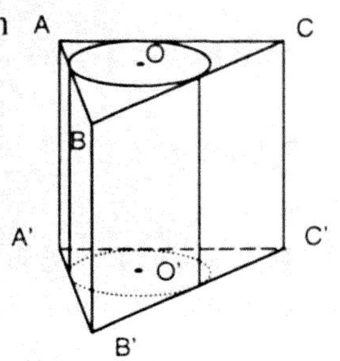


$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi Rh + 2.\pi R^2.$$

$$= 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{3}a + 2\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+1).$$

6. Hình trụ (nói ở đề bài) có:

Bán kính r bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Chiều cao h bằng cạnh bên AA' = 3a

Tính r:

* Tam giác ABC vuông ở A

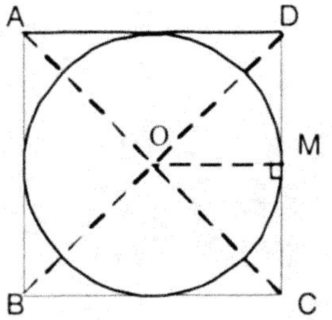
$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$.

* $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC = 6a^2$.

Nửa chu vi của tam giác ABC là : $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = 6a \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = a$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi a^2.3a = 3\pi a^3$ (đvtt).

7. Hình trụ đã cho có



Bán kính r bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD $= \dfrac{a}{2}$

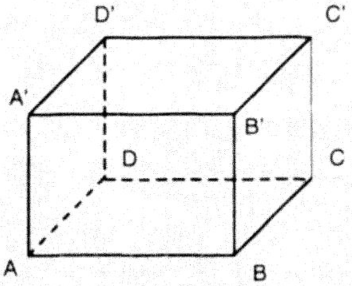
Chiều cao $h = AA' = AC = a\sqrt{2}$.

(Hình vuông AA'C'C có cạnh $AC = a\sqrt{2}$)

Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \dfrac{a}{2} a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{2}$ (đvdt).

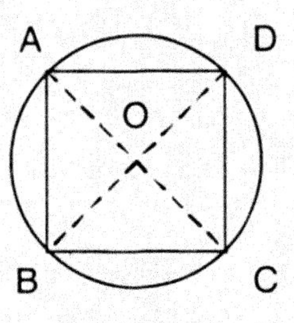
8. Thể tích của khối lập phương $V_1 = a^3$



Hình trụ ngoại tiếp hình lập hương nên hình trụ có: Bán kính R bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chiều cao h = a

$\Rightarrow$ Thể tích khối trụ là:



$$V_2 = \pi R^2 h = \pi \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 .a = \dfrac{\pi a^3}{2}.$$

Vậy kết quả $k = \dfrac{V_1}{V_2} = a^3 : \dfrac{\pi a^3}{2} = \dfrac{2}{\pi}$.

9. Hình trụ ngoại tiếp hình hộp chữ nhật (theo đề bài) nên hình trụ có:

Bán kính R bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ABCD

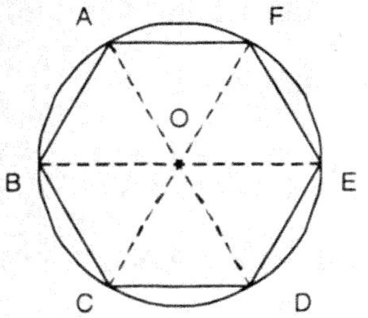
$$\frac{AC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Chiều cao h bằng cạnh bên AA' = $a\sqrt{5}$ (Vì hình vuông AA'C'C có cạnh AC = $a\sqrt{5}$).Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{5} = 5\pi a^2 \text{(đvdt)}.$$

10. ABCDEF là lục giác đều có cạnh bằng a nên đường tròn ngoại tiếp ABCDEF có bán kính bằng a. AA'B'B có diện tích bằng AA'.AB = $2a^2$

$$\Leftrightarrow AA' = \frac{2a^2}{AB} = 2a.$$



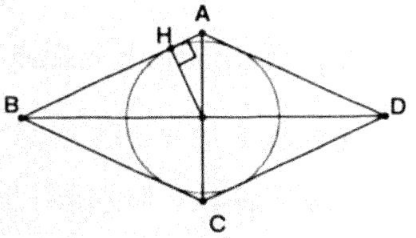
Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ (nói ở đề bài) Ta có:

Bán kính R = a. Chiều cao h = 2a.

$\Rightarrow$ Thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi a^3 \text{(đvtt)}.$$

11. Hình trụ nội tiếp lăng trụ ABCD.A'B'C'D'. Ta có: Bán kính R bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi ABCD. Tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a (vì AB = BC = AC = a).Vẽ OH $\perp$ AB, H $\in$ AB (Bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi ABCD là OH). Tam giác OAB vuông ở O và có đường cao OH nên

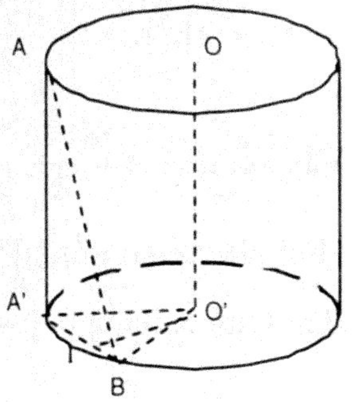


$$OH.AB = OA.OB$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy bán kính đáy của hình trụ là $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

12. Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao hình trụ đó lần lượt là R và h. Khi đó:



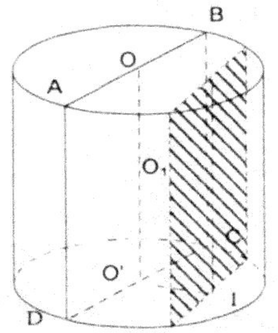
$S_d = \pi R^2 = 4\pi a^2$; $S_{xq} = S = 2\pi Rh$.

Từ các hệ thức trên ta có R = 2a và $h = \frac{S}{4\pi a}$. Như vậy thể tích khối trụ

là: $V = \pi R^2 h = \pi 4a^2 \frac{S}{4\pi a} = Sa$ (đvtt).

13. Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có các kích thước là 2R và h. Vậy diện tích thiết diện qua trục của hình trụ là

$$2Rh = 4a.\frac{S}{4\pi a} = \frac{S}{\pi} \text{ (đvdt)}.$$



14. Giả sử thiết diện qua trục OO' của hình trụ là hình vuông ABCD. Khi đó AB = AD = 2R. Gọi O_1 là trung điểm của OO' thì mặt cầu tâm O_1, bán kính O_1B là mặt cầu ngoại tiếp hình trụ. Dễ thấy $OB_1 = R\sqrt{2}$. Vậy diện tích mặt cầu là: $4\pi(R\sqrt{2})^2 = 8\pi R^2$.

Thể tích khối cầu là: $\frac{4}{3}\pi(R\sqrt{2})^3 = \frac{8}{3}\pi R^3\sqrt{2}$ (đvtt).

15. Mặt phẳng (P) song song với OO' nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh AD, cạnh còn lại theo giả thiết bằng R. Vậy diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P) là: $2R^2$.

Vì mặt phẳng (P) // OO' nên khoảng cách từ tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ hình trụ đến (P) bằng khoảng cách từ O' đến (P) và bằng O'I (I là trung điểm của dây cung).

Ta có: $OI' = R^2 - (\frac{R}{2})^2 = \frac{3R^2}{4}$. Tức là $O'I = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu trên theo đường tròn nên bán kính r của đường tròn được tính theo công thức:

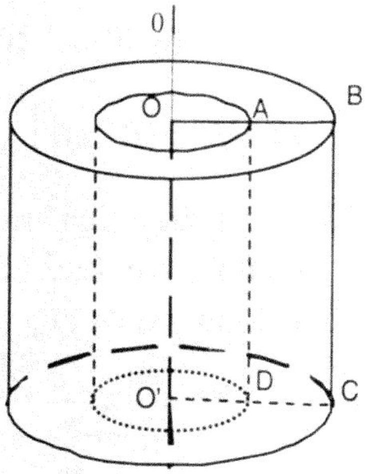
$$r^2 = O_1B^2 - O'I^2 = 2R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{5R^2}{4}.$$

Vậy diện tích thiết diện do mặt phẳng (P) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đã cho là: $S = \pi\frac{5R^2}{4} = \frac{5\pi R^2}{4}$ (đvdt).

Kí hiệu O, O' lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB, CD với Δ. Gọi V là thể tích cần tìm, V_2 là thể tích khối trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật OBCO' quanh Δ (với OA < OB) hoặc hình tạo

nên khi quay hình chữ nhật OADO' quanh Δ (với OA > OB); V_1 là thể tích khối trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật OADO' quanh Δ (với OA < OB) hoặc hình trụ tạo nên khi quay hình chữ nhật OBCO' quanh Δ (với OA > OB).

Khi đó $V = V_2 - V_1$. Từ đó:



* Nếu OA < OB, thì: $V = \pi OB^2.BC - \pi OA^2.AD$

$$= 2a\pi[(x+a)^2 - x^2] = 2a^2\pi(2x+a) \text{ (đvtt)}.$$

* Nếu OA > OB, thì: $V = \pi OA^2.AD - \pi OB^2.BC$

$$= 2a\pi[x^2 - (x-a)^2] = 2a^2\pi(2x-a) \text{ (đvtt)}.$$

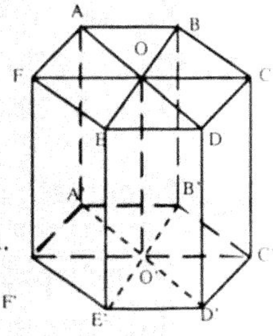
16. Thể tích khối cầu có bán kính bằng AB là $\frac{4}{3}\pi a^3$. Theo giả thiết ta có:

$4\pi a^3 = 2\pi a^2(2x+a)$ (với OA < OB)

Hoặc $4\pi a^3 = 2\pi a^2(2x-a)$(với OA > OB).

Từ đó $x = \frac{a}{2}$ với (OA < OB) hoặc $x = \frac{3a}{2}$ với (OA > OB).

17. Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đã có trục OO' (O, O' là tâm hai đáy hình lăng trụ) và đường tròn đáy hình trụ là đường tròn ngoại tiếp đáy lăng trụ. Dễ thấy bán kính đường tròn đáy hình trụ ngoại tiếp bằng a. Vậy thể tích khối trụ đó là $V_1 = \pi a^2 h$ (đvtt).



Hình75

18. Hình trụ nội tiếp lăng trụ đã cho có trục OO', đường tròn đáy hình trụ này là đường tròn nội tiếp đáy hình lăng trụ. Dễ thấy bán kính đường tròn đáy hình trụ nội tiếp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối trụ đó là: $V_2 = \pi.(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2.h = \frac{3}{4}\pi.a^2.h$ (đvtt).

19. Rõ ràng ABCD là hình chữ nhật, từ đó O là trung điểm AC.

Gọi M là trung điểm của AB thì $O_1M \perp AB$,

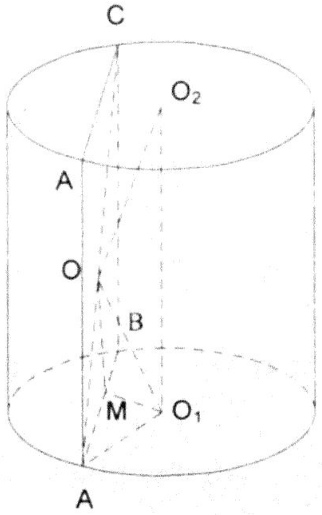
$OM \perp AB$ và $AO = AO_1$.

Hai tam giác vuông MAO và MAO_1 có MA chung, $OA = O_1A \Rightarrow OM = O_1M$.

Từ đó: $\widehat{OO_1M} = 45°$, do đó $\widehat{OO_1O_2} = 45°$.

Dễ thấy ΔO_1OO_2 cân tại O.

Vậy $\widehat{O_1OO_2} = 90°$.



20. a.Gọi M' là hình chiếu của M xuống đáy dưới.

Ta có: $\widehat{NMM'} = \varphi$; OO' // MM' .

$\Rightarrow$ OO' // mặt phẳng (NMM').

Gọi d là khoảng cách từ O' đến MN thì d bằng khoảng cách từ OO' đến mặt phẳng (NMM'). Kẻ:

$$\left.\begin{matrix} O'I \perp M'N \\ MM' \perp O'I \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'I \perp mp(NMM').$$

$\Rightarrow d = O'I$. Trong Δ MM'N vuông tại M'.

$NM' = MM'.\tan\varphi = a\tan\varphi$; $\Delta O'NI$ vuông tại I.

$$O'I^2 = O'N^2 - NI^2 \Rightarrow O'I = D = \frac{a}{2}.\sqrt{(4 - \tan^2\varphi)} .$$

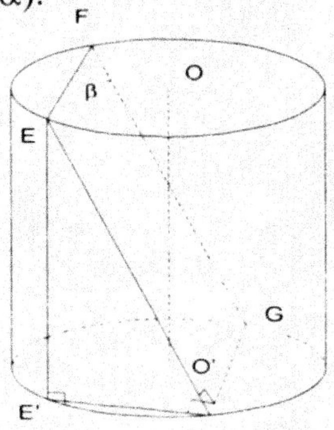
Vậy $d = \dfrac{a}{2}\sqrt{(4 - \tan^2\varphi)}$.

b. Ta có OO' // mặt phẳng (α) suy ra khoảng cách từ OO' đến mặt phẳng (α) chính là khoảng cách của O' đến mặt phẳng (α).

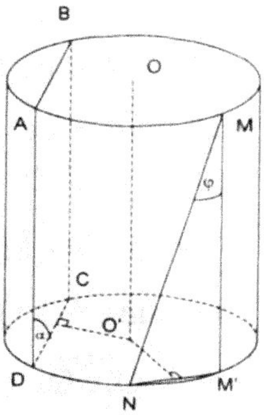
Ta có : $\left.\begin{matrix} O'J \perp CD \\ BC \perp O'I \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'J \perp mp(\alpha)$.

$\Rightarrow$ O'J là khoảng cách từ OO'đến mặt phẳng(α).

$\Rightarrow O'J = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



c. Gọi E' là hình chiếu của E xuống đáy dưới:



$$\left.\begin{matrix} HG \perp EE' \\ HG \perp HE \end{matrix}\right\} \Rightarrow HG \perp (EE'H) \Rightarrow \widehat{GHE'} = 90^\circ.$$

$\Rightarrow$ GE' là đường kính đường tròn tâm (O')

$\Rightarrow \widehat{E'EH}$ là góc tạo bởi EE' và mặt phẳng (β)

Do OO' // EE' $\Rightarrow$ góc tạo bởi giữa OO' và mặt phẳng (β) cũng là góc tạo bởi EE' và mặt phẳng (β) $\Rightarrow \widehat{E'EH}$ là góc tạo bởi giữa trục hình trụ và mặt phẳng (β). Gọi x là độ dài cạnh hình vuông EFGH.

ΔEE'H vuông tại E': $E'H^2 = x^2 + a^2$ (1).

ΔE'HG vuông tại H: $E'H^2 = 4a^2 - x^2$ (2).

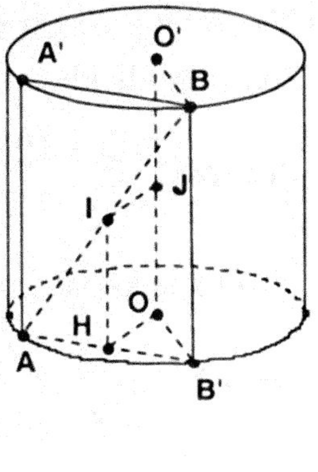
Từ (1) và (2): $x^2 + a^2 = 4a^2 - x^2$.

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{5a^2}{2} \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. Trong tam giác vuông EE'H:

$$\cos \widehat{E'EH} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{E'EH} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

21. a. Dựng các đường sinh AA' và BB' thì thiết diện qua AB và song song với trục là hình chữ nhật AB'BA'; $\widehat{ABB'} = 30^\circ$ là góc tạo bởi giữa AB và trục. Trong ΔABB' vuông:

$AB' = BB'.tg\,30^\circ \Rightarrow AB' = R\sqrt{3}.\dfrac{1}{3} = R$.



Do đó $S_{AB'BA'} = AA'.AB' = R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$ (đvdt).

b. Ta có: OB' // O'B (OO'BB' là hình chữ nhật).

Ta có góc giữa OA và O'B là $\widehat{OAB}$;

$AB' = R \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$.

$$\left.\begin{matrix} OH \perp AB' \\ OH \perp BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH \perp (ABB')$$

- Dựng đường thẳng qua H song song với OO' cắt AB tại J

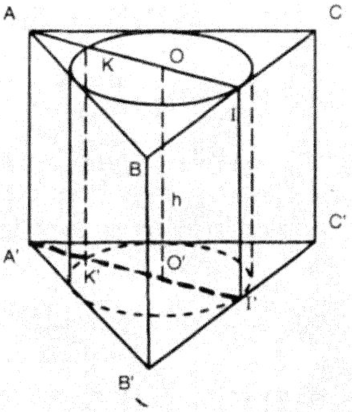
- Dựng JI // OH (I ∈ OO'), JI chính là đoạn thẳng vuông góc chung cần phải dựng.

$$\left.\begin{matrix} OH \perp (ABB') \\ OH \parallel IJ \end{matrix}\right\} \Rightarrow IJ \perp mp(ABB') \Rightarrow \begin{cases} IJ \perp AB \\ IJ \perp BB' \end{cases}.$$

Mà BB' // OO' ⇒ IJ ⊥ AB và BB'.

Tính IJ: Ta có $\begin{cases} IJ \perp OH \\ IH = AB'.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow IJ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

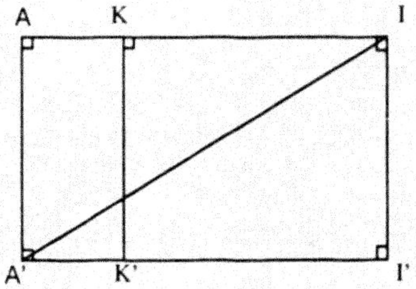
22. a. Hình trụ nội tiếp trong hình lăng trụ có đường tròn đáy tiếp xúc với các cạnh tam giác đáy tại trung điểm mỗi cạnh. Gọi I là trung điểm BC và r là bán kính đáy của hình trụ.



$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow r = OI = \dfrac{1}{3}.AI \\ AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi\dfrac{a\sqrt{3}}{2}h$.

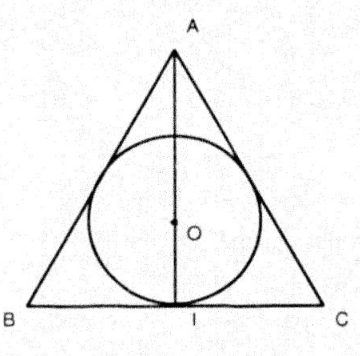
Với l = h (gt) ⇒ $S_{xq} = \dfrac{\pi\sqrt{3}a.h}{6}$.



$V = \pi r^2 h = \pi(a.\dfrac{\sqrt{3}}{6})^2.h$.

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi}{12}.a^2.h$ (đvtt).

b. Ta có: mặt phẳng (AA'I) là mặt phẳng cắt hình trụ theo một thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật IKK'I' nên A'I cắt KK' tại M do đó A'I cắt hình trụ theo đoạn IM



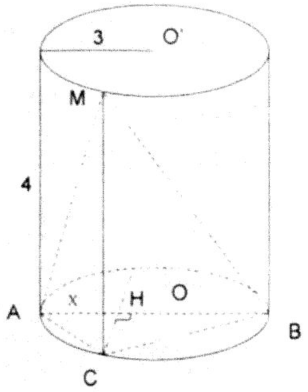
Ta có: $\dfrac{KM}{AA'} = \dfrac{IK}{IA} = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow KM = \dfrac{2}{3}.AA' = \dfrac{2}{3}.h$.

Trong Δ vuông IKM có :

$$IM^2 = IK^2 + KM^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{4h^2}{9} = \frac{3a^2 + 4h^2}{9}$$

$$\Rightarrow \ IM = \frac{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{3}.$$



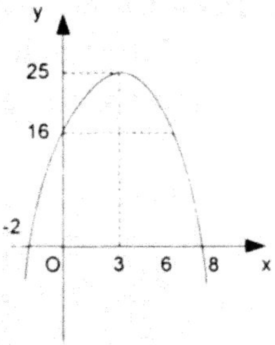
23. a.1). Trong các Δ vuông ABC, MCA, MCB

Ta có: $MA^2 = MC^2 + CA^2$.

$MB^2 = MC^2 + CB^2; AB^2 = CA^2 + CB^2$.

Tổng bình phương các cạnh của hình chóp MABC là:

$$T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + CA^2 + CB^2 + AB^2$$
$$= 3MC^2 + 2(CA^2 + CB^2) + AB^2$$
$$= 3MC^2 + 3AB^2 = 3(4^2 + 6^2) = 156.$$



2) Tính MH theo x:

Trong Δ vuông ABC có CH là đường cao nên:

$$CH^2 = AB.HB \Rightarrow CH^2 = x(6 - x).$$

Trong Δ vuông MCH: $MH^2 = MC^2 + CH^2 = 16 + x(6 - x)$.

$\Rightarrow MH^2 = -x^2 + 6x + 16 (0 \le x \le 6) \Rightarrow MH = \sqrt{(-x^2 + 6x + 16)}$.

3) Ta có:

$AB \perp MC; AB \perp CH \Rightarrow AB \perp mp(MCH) \Rightarrow AB \perp MH$.

$\Rightarrow S_{MAB} = \frac{1}{2}AB.MH = 3.MH \Rightarrow$ S cực đại khi MH cực đại.

Bằng đồ thị	Bằng hình học
Nhìn vào hình vẽ $MH^2 = y = -x^2 + 6x + 16 (0 \le x \le 6)$. đạt giá trị lớn nhất là 25 khi x = 3 ⇒MH đạt giá trị lớn nhất là 5 khi	Ta có: MC ⊥mặt phẳng (ABC) ⇒ MC là đoạn vuông góc và MH là đoạn xiên; MC = 4 không đổi nên: MH cực đại khi CH cực đại. Vậy S cực đại khi CH cực đại tức

$x = 3$ lúc đó $H \equiv O$ $\Rightarrow$ vị trí của M $S_{MAB} = 3.5 = 15$ (đvdt).	là C là trung điểm cung AB. Lúc đó $H \equiv O$ $\Rightarrow x = AH = OH = 3$. $\Rightarrow$ vị trí của M cần tìm $S = 3.5 = 15$ (đvdt).

4). $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.CM$; trong đó $CM = 4$ và:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \sqrt{AH.HB} \Rightarrow S_{ABC} = 3.\sqrt{x(6-x)}$.

Do đó $V = 4.\sqrt{x(6-x)}$ (đvdt). Ta có: $x + 6 - x = 6$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $x(6 - x)$ cực đại khi $x = 6 - x$

$\Leftrightarrow x = 3$. Điều này chứng tỏ rằng V cực đại khi và chỉ khi S cực đại.

b. Tính x để $V = 4k$ (k là hằng số cho trước).

Ta có $V = 4k = \sqrt{x(6-x)} = k \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ x^2 - 6x + k^2 = 0;\ \Delta' = 9 - k^2 \end{cases}$.

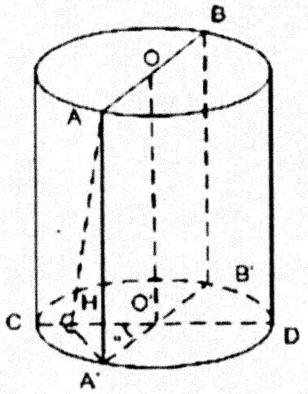
Để phương trình có nghiệm: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow k^2 \leq 9 \Leftrightarrow 0 < k \leq 3$.

Sau đó ta phải so sánh hai nghiệm số với 0 và 6 vì $0 \leq x \leq 6$.

Khi $\Delta' \geq 0$ thì (1) có hai nghiệm dương vì $\begin{cases} S = 6 > 0 \\ P = k^2 > 0 \end{cases}$

a $f(6) = 36 - 36 + k^2 = k^2 > 0$; $\frac{S}{2} - 6 = 3 - 6 < 0$

$\Rightarrow 0 < x' < x'' < 6$ Do đó ta nhận $\left[\begin{array}{l} x = 3 + \sqrt{9 - k^2} \\ x = 3 - \sqrt{9 - k^2} \end{array}\right.$.



24. Tính diện tích ΔACD

* Kẻ đường kính A'B' // AB

$\Rightarrow \widehat{A'OC} = \alpha$ và A'B' là hình chiếu của AB xuống

hình tròn đáy (O')

$A'H \perp CD; AA' \perp CD$

$\Rightarrow CD \perp (AHA') \Rightarrow CD \perp AH$

Do đó $\widehat{AHA'} = \varphi$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ACD) và mặt phẳng (O'). Ta có: $S_{ACD} = \frac{1}{2}CD.AH$. Trong đó CD = 2R (1).

$$\left.\begin{array}{l} {}^{*}AH^2 = AA'^2 + A'H^2 \\ A'H = R\sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AH = \sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2}2R.\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha} = R.\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}$.

Tính góc φ: $\cos\phi = \frac{A'H}{AH} = \frac{R\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}}$.

$$\Rightarrow \phi = ar\cos\left(\frac{R\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + R^2\sin^2\alpha}}\right).$$

b. Ta có: OO' ⊥ A'B' và CD ⇒ OO' ⊥ AB và CD, suy ra OO' là đoạn thẳng vuông góc chung của AB và CD.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\alpha = \frac{1}{6}4R^2.h.\sin\alpha = \frac{2R^2h}{3}\sin\alpha \text{ (đvtt).}$$

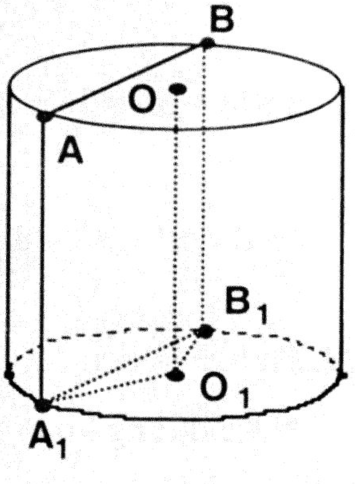
V đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$ nghĩa là AB ⊥ CD.

25. a. Từ $S_{xq} = 2\pi R.OO_1$ (R là bán kính đáy)

$S_{tp} = 2\pi R(R + OO_1)$

Ta có $\frac{S_{tp}}{S_{xq}} = \frac{R}{OO_1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Vậy $S_{tp} = \frac{3}{2}.4\pi = 6\pi$(đvdt).



b. Với thiết diện ABB_1A_1, $\widehat{A_1O_1B_1} = 120°$

từ đó $A_1B_1 = 2R\sin 120° = R\sqrt{3}$

Mặt khác $4\pi = S_{xp} = 2\pi R.OO_1 = 2\pi R.2R \Rightarrow R = 1$.

Vậy $A_1B_1 = \sqrt{3}$

Do đó diện tích thiết diện là : $A_1B_1.AA_1 = 2.\sqrt{3}$

c. Thể tích khối trụ được tính bởi

$$V = \pi R^2.AA_1 = 2\pi R^3 = 2\pi.$$

d. Gọi A_1C_1 là một cạnh của n – giác đều nội tiếp đáy hình trụ thì $\widehat{A_1O_1C_1} = \frac{2\pi}{n}$ và diện tích đáy hình lăng trụ bằng

$$S_n = n.S_{\Delta A_1O_1C_1} = n.\frac{1}{2}.R^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Kí hiệu diện tích đáy hình trụ là S thì

$$\frac{S_n}{S} = \frac{\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2} = \frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}. \text{ Từ đó } \frac{V_n}{V} = \frac{n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}.$$

Tức là $V_n = V.\frac{n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} = \pi.R^2.2R.\frac{n.\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi} = n.\sin\frac{2\pi}{n}.$

(V_n và V lần lượt là thể tích của khối lăng trụ n - giác đều nội tiếp hình trụ và thể tích khối trụ)

e. Đường tròn lớn của hình cầu ngoại tiếp hình trụ là đường tròn ngoại tiếp thiết diện qua trục. vậy bán kính mặt cầu là $R_c = R\sqrt{2}$ (R là bán kính đáy hình trụ). Từ đó thể tích khối cầu phải tìm là:

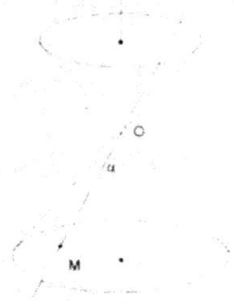
$$V_c = \frac{4}{3}\pi(R_C)^3 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

§3. MẶT NÓN, HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa mặt nón

- **Định nghĩa**:



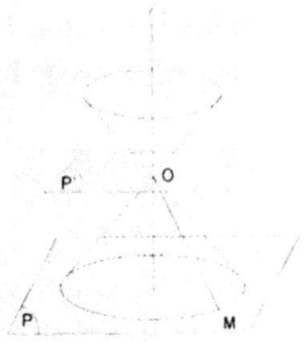
Cho đường thẳng Δ *và một điểm O cố định trên* Δ. *Tập hợp N gồm điểm O và các điểm M không trùng với O sao cho đường thẳng OM tạo với* Δ *một góc không đổi* α $(0^0 < \alpha < 90^0)$ *được gọi là một mặt nón tròn xoay, hay đơn giản là mặt nón.*

- Điểm O được gọi là *đỉnh* của của mặt nón, đường thẳng Δ được gọi là *trục* của mặt nón, góc 2α gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón.

Nếu M là một điểm nằm trên mặt nón nhưng không trùng với điểm O thì toàn bộ đường thẳng OM cũng nằm trên mặt nón. Vậy, có thể xem *mặt nón N là hình tạo bởi các đường thẳng đi qua O và hợp với* Δ *một góc bằng* α. Các đường thẳng như thế gọi là *đường sinh* của mặt nón.

2. Hình nón và khối nón

- Cho mặt nón **N** với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh 2α.



Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại điểm I khác với đỉnh O. Mặt phẳng (P) sẽ cắt mặt nón theo một đường tròn (C) có tâm I. Gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O.

Khi đó:

- *Phần của mặt nón N giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn (C) được gọi là một hình nón.*

- Điểm O gọi là đỉnh của hình nón, hình tròn (C) gọi là đáy của hình nón.

- Với điểm M nằm trên đường tròn (C), đoạn thẳng OM gọi là đường sinh của hình nón, các đường sinh của hình nón có độ dài bằng nhau.

- Đoạn thẳng OI gọi là trục của hình nón, độ dài OI gọi là chiều cao của hình nón.

- *Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón xác định bởi hình nón đó.*

3. Khái niệm về diện tích hình nón và thể tích hình nón

- Một hình chóp gọi là nội tiếp một hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón.

- **Định nghĩa**:

- *Diện tích xung quanh của hình nón N là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp N khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

- *Thể tích của khối chóp N là giới hạn của thể tích của khối chóp đều nội tiếp N khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

- Diện tích xung quanh của hình nón bằng một nửa tích số của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.

- Thể tích khối nón bằng một phần ba tích số diện tích hình tròn đáy và chiều cao.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi R l$.

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$ hay $S_{tp} = \pi R l + \pi R^2$.

- Thể tích: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.

Trong đó R: bán kính đáy, h: chiều cao và l là đường sinh của hình nón N.

Bài tập vận dụng

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

   A. Cắt mặt nón bởi một mặt phẳng đi qua trục Δ của nó thì được hai đường sinh đối xứng với nhau qua Δ.

   B. Cắt mặt nón bởi một mặt phẳng (P) vuông góc với trục của nó thì được một đường tròn.

   C. Cắt hình nón đỉnh O bởi một mặt phẳng đi qua trục của nó thì được một tam giác cân OAB với đáy là đường kính AB của đương tròn đáy.

   D. Mặt nón, hình nón, khối nón có duy nhất một trục đối xứng và có vô số mặt phẳng đối xứng.

2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

A. Mặt nón tròn xoay là hình tạo bởi các tiếp tuyến của mặt cầu cho trước và đi qua một điểm cho trước nằm ngoài mặt cầu.

B. Mặt nón tròn xoay là hình gồm tất cả các đường thẳng đi qua một điểm O cố định và tạo với một đường thẳng cố định một góc không đổi α ($0^0 < \alpha < 90^0$).

C. Mặt nón tròn xoay là mặt tròn xoay sinh ra bởi một đường thẳng d khi quay quanh đường thẳng cố định Δ cắt d nhưng không vuông góc với d.

D. Mặt nón tròn xoay là tập hợp gồm điểm O nằm trên một đường thẳng Δ và các điểm M khác O sao cho góc giữa OM và Δ bằng α cho trước ($0^0 < \alpha < 90^0$).

3. Gọi l, h, R lần lượt là đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón N. Công thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{h^2}$ B. $l^2 = R^2 + h^2$

C. $l^2 = Rh$ D. $R^2 = lh$.

4. Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và BD vuông góc với BC. Khi quay tất cả các cạnh còn lại của tứ diện đó quanh cạnh AB, hỏi có bao nhiêu hình nón được tạo thành nhận đoạn AB làm đường cao (hay trục). Chọn câu đúng

A. Một hình nón. B. Hai hình nón.

C. Ba hình nón. D. Bốn hình nón.

5. Một hình nón có đường sinh l và góc giữa đường sinh và đáy là α

a. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón

b. Gọi I là điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho $\frac{SI}{SO} = k$ $(0 < k < 1)$. Tính diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục.

6. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.

a. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b. Tính thể tích của khối nón tương ứng.

c. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích của thiết diện này.

7. Cho hình nón có đường cao SO = h và bán kính đáy R. Gọi M là điểm trên đoạn OS, đặt OM = x ($0 < x < h$).

a. Tính diện tích của thiết diện (T) vuông góc với trục tại M.

b. Tính thể tích V của hình nón đỉnh O và đáy (T) theo R, h và x. Xác định x sao cho V đạt giá trị lớn nhất.

8. a. Tìm hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước.

b. Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước.

9. Tìm hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của nó bằng diện tích hình tròn bán kính a cho trước.

10. Trong tất cả các hình nón nội tiếp hình cầu bán kính R, tìm hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất.

Hướng dẫn

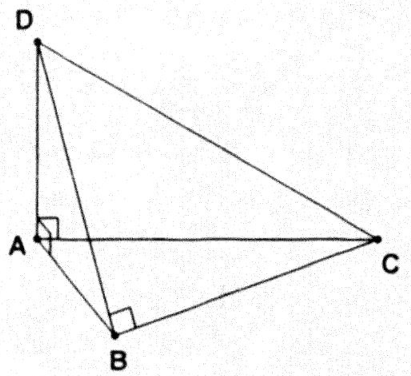
1. Câu B.

2. Câu D.

3. Câu B.

4. Câu B.

Một hình nón có đỉnh B đường sinh BD, một hình nón có đỉnh A đường sinh AC



5. a. SO = l. sinα

OM = R = lcosα

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(l\cos\alpha)^2.l\sin\alpha$.

$V = \frac{1}{3}\pi l^3\cos^2\alpha.\sin\alpha$.

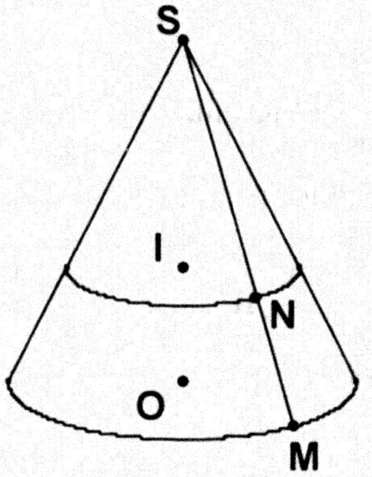
$S_{xq} = \pi Rl = \pi.l.(l\cos\alpha) = \pi l^2\cos\alpha$.

b. $\frac{SI}{SO} = k \Rightarrow \frac{IN}{OM} = k$.

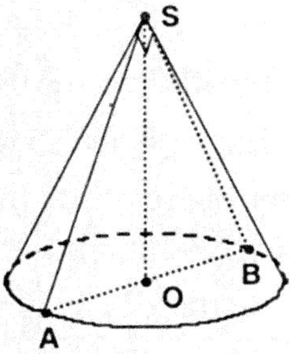
$\Rightarrow IN = k.OM = k.l.\cos\alpha$.

$S_{\text{thiết diện}} = \pi IN^2 = \pi(k.l.\cos\alpha)^2$.

$S_{\text{thiết diện}} = \pi k^2 l^2\cos^2\alpha$.



6. a.Xét hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Gọi SAB là thiết diện qua trục SO. Theo giả thiết SAB là tam giác vuông cân, do đó l = SA = SB = a.



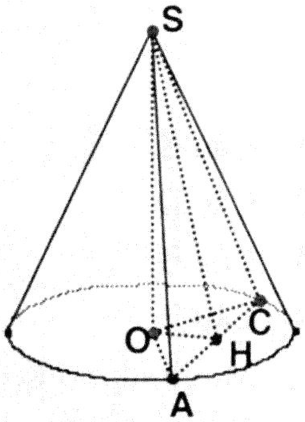
$\Rightarrow AB = a\sqrt{2}$, và $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Như vậy: $S_{xq} = \pi Rl = \pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}a^2$.

$S_{tp} = S_{xq} + \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi a^2}{2} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2}\pi a^2$.

b. $h = SO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.\frac{2a^2}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi a^3.$$



c. Giả sử tam giác ASC là thiết diện qua đỉnh và hợp với đáy một góc 60^0. Gọi H là trung điểm của AC ta có:

$$\widehat{SHO} = 60^0 \text{ suy ra } SH = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$OH = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6};\quad AH = \sqrt{AO^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{6a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}AC.SH = AH.SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy diện tích thiết diện là: $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

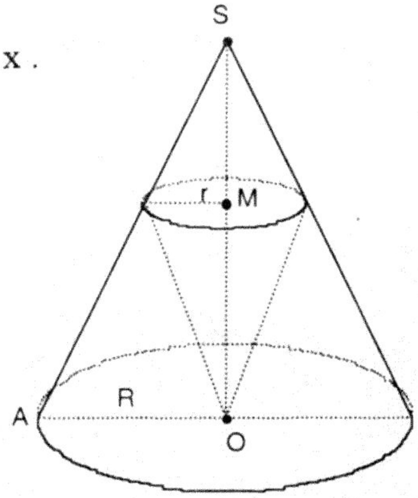
7. a. Gọi r là bán kính của thiết diện (T) vuông góc với trục tại M:

Ta có: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h-x}{h} \Rightarrow r = \dfrac{R}{h}(h-x)$.

Do đó diện tích (T) bằng $\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)^2$.

b. Gọi V là thể tích khối nón đỉnh O và đáy là (T):

$V = \frac{1}{3}$ diện tích (T). OM $= \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2.x$.



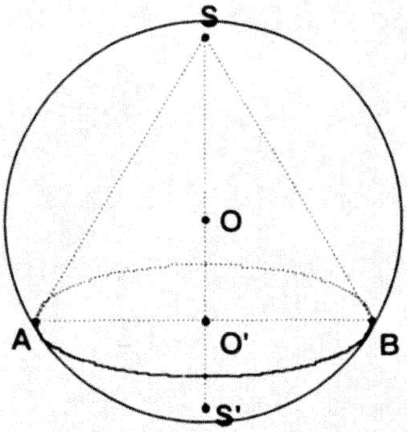
Cần xác định x để V đạt giá trị lớn nhất:

$$V = \begin{aligned}&\frac{1}{3}.\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-x)x\\ &=\frac{1}{6}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-x)2x.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm h – x, h – x, 2x ta được:

$$V \le \frac{1}{6}.\frac{\pi R^2}{h^2}.\left(\frac{2h}{3}\right)^3 = \frac{\pi R^2}{6h^2}.\frac{8h^3}{27} = \frac{4\pi R^2 h}{81}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $h - x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.



8. Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y ($0 < x \le R$, $0 < y < 2R$).

Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì ta có: $x^2 = y(2R - y)$

Gọi V_1 là thể tích khối nón thì:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y(2R - y).$$

$$= \frac{\pi}{6}(4R - 2y).y.y \le \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R - 2y + y + y}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

Vậy thể tích V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi:

$$4R - 2y = y \Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}, \text{ từ đó } x^2 = \frac{4R}{3}(2R - \frac{4R}{3}) = \frac{8R^2}{9}.$$

hay $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$.

b. Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo đường tròn bán kính r và hình tròn này nội tiếp tam giác cân SAB.

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y $(x > 0, y > 2r)$ thì:

$(AH + SA).r = \frac{1}{2}AB.SH$.

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + y^2}).r = x.y \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2y}{y - 2r}$.

Vậy thể tích khối nón ngoại tiếp mặt cầu bán kính r là:

$$V_2 = \pi x^2 y = \pi r^2 . \frac{y^2}{y - 2r}.$$

Ta có: $\frac{y^2}{y - 2r} = \frac{y^2 - 4r^2 + 4r^2}{y - 2r} = (y + 2r) + \frac{4r^2}{y - 2r}$.

$$= y - 2r + \frac{4r^2}{y - 2r} + 4r \geq 2\sqrt{(y - 2r).\frac{4r^2}{y - 2r}} + 4r = 8r.$$

Từ đó $V_2 \geq 8\pi r^3$ hay V_2 đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi

$y - 2r = \frac{4r^2}{y - 2r} \Leftrightarrow y = 4r$ từ đó $x = r\sqrt{2}$.

9. Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao hình nón lần lượt là x và y (x, y >0)

Khi đó diện tích toàn phần hình nón là: $\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2}$.

Theo giả thiết ta có: $\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2$.

$\Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2$ (điều kiện $x < a$).

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + y^2) = a^4 - 2a^2x^2 + x^4$.

$\Leftrightarrow x^2y^2 = a^4 - a^2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$.

Khi đó thể tích khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{a^4}{y^2 + 2a^2}.y = \frac{\pi.a^4}{3}.\frac{y}{y^2 + 2a^2}.$$

V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y}{y^2 + 2a^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

Hay $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\dfrac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \dfrac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y.\dfrac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}.a$.

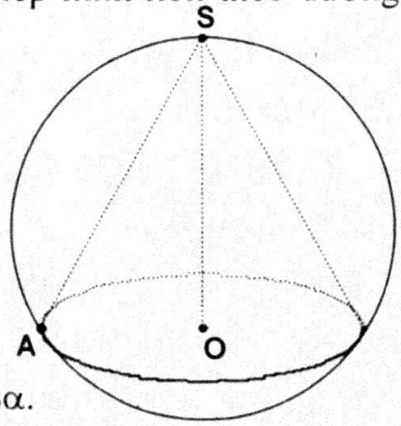
Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi:

$y = \dfrac{2a^2}{y}$ hay $y^2 = 2a^2$ hay $y = a\sqrt{2}$.

Lúc đó $x^2 = \dfrac{a^4}{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + 2a^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của V là $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$ tại $x = \dfrac{a}{2}$.

10. Xét mặt phẳng chứa trục SO của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu ngoại tiếp hình nón theo đường tròn lớn ngoại tiếp tam giác SAB.



Áp dụng định lí hàm số sin:

$\Rightarrow SA = SB = 2R\sin\alpha$

$OB = SB.\cos\alpha = R\sin 2\alpha$.

Từ đó diện tích xung quanh hình nón là:

$S_{xq} = \pi(R\sin 2\alpha).(2R\sin\alpha)$

$= 4\pi R^2\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\pi R^2(1 - \cos^2\alpha).\cos\alpha$.

Đặt $f(t) = (1 - t^2).t$ với $0 < t = \cos\alpha < 1$.

F(t) đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \cos\alpha$.

$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$, khi đó $\dfrac{SO}{OB} = \tan\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow SO = OB\ .\sqrt{2}$ (*).

Vậy hình nón có có đường cao và bán kính đáy thỏa mãn điều kiện (*) nội tiếp mặt cầu đã cho có diện tích xung quanh lớn nhất.

§4. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

Kiến thức cơ bản

- Trục của đường tròn (O; R) là đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng đó.
- Nếu điểm M không nằm trên đường thẳng Δ thì có một đường tròn duy nhất đi qua M và có trục là Δ. Kí hiệu đường tròn đó là (C_M).

1. Định nghĩa:

Trong không gian, cho hình H và đường thẳng Δ. Hình gồm các đường tròn (C_M) với M thuộc H được gọi là hình tròn xoay sinh bởi H khi quay quanh Δ. Đường thẳng Δ gọi là trục của hình tròn xoay đó.

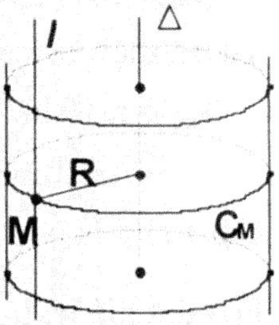
Khi hình H là một đường thì hình tròn xoay sinh bởi nó gọi là mặt tròn xoay.

2. Một số ví dụ:

- *Ví dụ 1:* Xét hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng *l* khi quay quanh đường thẳng Δ.

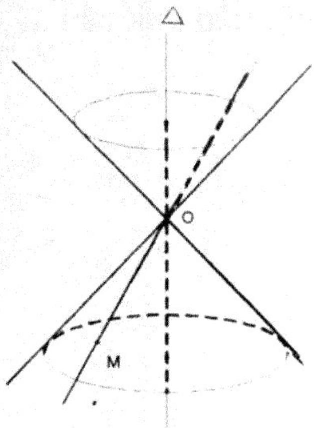
** Trường hợp 1: Đường thẳng l song song với Δ và cách Δ một khoảng cách R.*

Khi đó các đường tròn (C_M) với $M \in l$ đều có bán kính là R. Hình tròn xoay nhận được chính là mặt trụ tròn xoay có trục là Δ và một đường sinh là *l*.



** Trường hợp 2: Đường thẳng l cắt Δ tại một điểm O nhưng không vuông góc với Δ.*

Khi đó các đường tròn (C_M) không bằng nhau, tuy nhiên hai đường tròn nào cũng tương ứng với nhau qua phép vị tự tâm O. Trong trường hợp này, hình tròn xoay nhận được chính là mặt nón tròn xoay có trục là Δ và có một đường sinh là *l*.

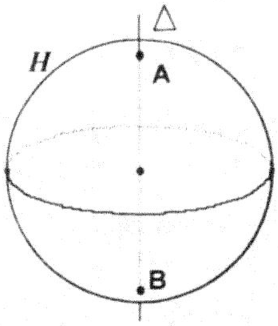


Trường hợp 3: Đường thẳng l và Δ chéo nhau và có đường vuông góc chung là PQ ($P \in l$, $Q \in \Delta$).

Khi đó (C_P) là đường tròn có bán kính bé nhất (bằng PQ). Các đường tròn (C_P) có bán kính càng lớn khi $M \in l$ càng cách xa điểm P.

Trường hợp này hình tròn xoay nhận được gọi là mặt hypebôlôit.

- *Ví dụ 2:*



* Nếu hình ***H*** là đường tròn có đường kính AB nằm trên đường thẳng Δ thì rõ ràng hình tròn xoay sinh bởi ***H*** khi quay quanh Δ là mặt cầu đường kính AB.

* Nếu ***H*** là hình tròn có đường kính AB nằm trên đường thẳng Δ thì hình tròn xoay sinh bởi ***H*** khi quay quanh Δ là khối cầu đường kính AB.

Bài tập vận dụng

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hình trụ được sinh bởi ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư.

B. Khối trụ được sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

C. Khối cầu được sinh bởi một nửa hình tròn (kể cả các điểm trong) đường kính AB khi cho nó quay chung quanh AB.

D. Hình cầu được sinh bởi một đường tròn lớn khi quay quanh trục của đường tròn lớn.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hình nón được sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác cân đó.

B. Hình nón được sinh bởi ba cạnh của một tam giác vuông khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh của tam giác vuông đó.

C. Khối nón được sinh bởi một tam giác vuông (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

D. Khối nón được sinh bởi một tam giác cân (kể cả điểm trong) khi quay quanh trục đối xứng của tam giác cân đó.

3. Cho hình chữ nhật ABCD: AB = a, AD = 3a. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình chữ nhật ABCD (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh AD là:

A. $3\pi a^3$ B. $9\pi a^3$ C. $6\pi a^3$ D. Đáp số khác

4. Cho ΔABC vuông ở A, AC = 3a, AB = 4a. Diện tích của hình tròn xoay sinh ra bởi hai cạnh AC và BC khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh AB là:

A. $21\pi a^2$ B. $18\pi a^2$ C. $24\pi a^2$ D. $31\pi a^2$

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^0$ và BC = 3a. Khi cho ΔABC (kể cả các điểm trong) quay quanh đường thẳng chứa cạnh BC ta được một khối tròn xoay có thể tích $V = 2\pi a^3$. Tính độ dài đường cao vẽ từ A của ΔABC.

6. Cho tam giác ABC vuông ở A: AB = 5a, BC = 13a. Cho các cạnh AB và AC của ΔABC quay quanh đường thẳng chứa cạnh BC ta được một hình tròn xoay T. Tính diện tích của T.

7. Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH và AB = 2a, BC = 4a. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho ΔABC (kể cả các điểm trong) quay quanh đường thẳng AH.

8. Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = c, AC = b. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi ΔABC (kể cả các điểm trong) quay quanh đường thẳng BC.

9. Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = 8a, AC = 15a, AD là phân giác trong tại A của ΔABC và (O) là đường tròn nội tiếp ΔABC. Cho đường tròn (O) (kể cả các điểm trong) quay quanh AD ta sẽ được một khối tròn xoay. Tính thể tích của khối tròn xoay này.

10. Cho hình thang vuông ABCD có đường cao AB = 3cm, đáy nhỏ AD = 2cm, đáy lớn BC = 4cm. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang ABCD (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng AB.

Hướng dẫn

1. Câu D.

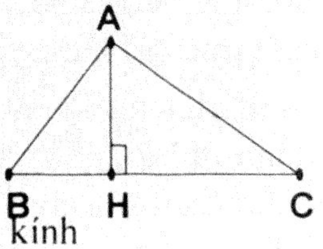
2. Câu B.

3. Câu B.

4. Câu D.

5. Hình tròn xoay sinh ra gồm hai hình nón:

- Hình nón 1 có đỉnh B, chiều cao BH, bán kính đáy AH.



- Hình nón 2 có đỉnh C, chiều cao CH, bán kính đáy AH.

$\Rightarrow$ Thể tích của khối tròn xoay là:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2 BH + \frac{1}{3}\pi AH^2.CH.$$

$$= \frac{1}{3}\pi AH^2(BH + CH) = \frac{1}{3}\pi AH^2.BC.$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{1}{3}\pi AH^2.BC = 2\pi a^3$

$\Leftrightarrow AH^2 = \frac{6a^3}{BC} = 2a^2$ (vì BC = 3a) hay $AH = a\sqrt{2}$.

6. $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 12a$.

Hình tròn xoay có diện tích :

$S = S_1 + S_2 = \pi.AH.AB + \pi.AH.AC = \pi.AH(AB + AC)$.

Với AB = 5a, AC = 12a, $AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{60a}{13}$.

Vậy $S = \pi\frac{60a}{13}(5a + 12a) = \frac{1020\pi a^2}{13}$.

7. $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4a^2}{4a}$, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = a\sqrt{3}$.

HC = BC – BH = 3a.

Hình tròn xoay sinh ra là hình nón có đỉnh A, chiều cao AH và bán kính đáy bằng HC.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.HC^2.AH = \frac{1}{3}\pi.(3a)^2 = 3\pi a^3\sqrt{3}$.

8. Khối sinh ra gồm hai khối nón:

- Khối nón 1 có đỉnh B, đường cao BH và bán kính đáy bằng AH.
- Khối nón 2 có đỉnh C, đường cao CH và bán kính đáy bằng AH.

Vậy thể tích của khối tròn xoay là:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi AH^2.CH.$$

$$= \frac{1}{3}\pi AH^2(BH + CH) = \frac{1}{3}\pi AH^2 BC.$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{AB.AC}{BC}\right)^2.BC = \frac{1}{3}\pi\frac{AB^2.AC^2}{BC}.$$

hay $V = \frac{1}{3}\pi\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

9. * $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(8a)^2 + (15a)^2} = 17a$.

* Tam giác ABC có :

- Diện tích $S = \frac{1}{2}AB.AC = 60a^2$.

- Nửa chu vi $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = 20a$.

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{S}{p} = 3a$.

* Khi cho (O) quay quanh AD ta được khối cầu có bán kính $r = 3a$.

$\Rightarrow$ Thể tích của khối tròn xoay là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3a)^3 = 36\pi a^3.$$

10. Hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại S. Khi cho hình vẽ quay quanh AB thì khối tròn xoay sinh ra là hình nón cụt có thể tích:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi BC^2.SB - \frac{1}{3}\pi AD^2.SA = \frac{1}{3}\pi(16.SB - 4.SA).$$

Vì $AD = \frac{1}{2}BC$ và $AD /\!/ BC$ nên AD là đường trung bình của ΔSBC.

$\Rightarrow SB = 2AB = 6$ và $SA = SB = 3$. Vậy $V = \frac{1}{3}(16.6 - 4.3) = 28\pi$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao bằng h và cạnh bên bằng l. Tính thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp S.ABCD (hình nón có đỉnh là S và đáy là hình tròn ngoại tiếp ABCD) .

2. Tính diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao bằng h và cạnh bên bằng l.

3. Cho hình chóp tam giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính thể tích của khối nón N có đỉnh là S và đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC.

4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng 2a. Tính thể tích khối nón có đỉnh là S và đáy là hình tròn nội tiếp ABCD .

5. Cho tam giác ABC vuông ở A và AB = 21a, AC = 20a. Gọi O là tâm đường tròn (δ) nội tiếp tam giác ABC. Vẽ đoạn SO = 15a và SO $\perp$ (ABC). Tính thể tích khối nón có đáy là (δ) và đỉnh S .

6. Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Xét hình nón có đỉnh là A và đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của tứ diện ABCD và khối nón. Tính tỉ số $k = \dfrac{V_1}{V_2}$.

7. Cho tứ diện ABCD cạnh bằng a. Cho hình nón ngoại tiếp ABCD. Tính tỉ số thể tích của tứ diện ABCD và thể tích khối nón .

8. Một hình trụ có đường kính đáy R và có thiết diện qua trục là 1 hình vuông. Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho .

9. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60°. Tính diện tích của thiết diện này .

10. Cho hình chóp tứ giác đều SABCDcó cạnh đáy a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là φ . Tính bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp .

11. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy AB = a và $\widehat{ASB} = 2\alpha$. Tính diện tích toàn phần của hình chóp .

12. Trong không gian, Tính thể tích khối nón ngoại tiếp khối chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy AB = a và $\widehat{ASB} = 2\alpha$.

13. Trong không gian, cho hình cầu tâm O, đường kính SS' = 2R, mặt phẳng vuông góc với SS' cắt mặt cầu theo đường tròn tâm H. Gọi ABC là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn này. Đặt SH = x $(R < x < 2R)$. Tìm giá trị x để SABC là tứ diện đều .

14. Với giá trị x đã tìm được ở câu 13, tính thể tích khối tứ diện SABC.

15. Trong không gian, tính diện tích mặt cầu nội tiếp trong tứ diện đều ABCD cạnh a .

16. Trong không gian, cho hình nón đỉnh S, bán kính đáy R. Trên đáy hình nón lấy một lục giác đều ABCDEF nội tiếp. Mặt phẳng (SAB) hợp với đáy hình nón một góc α. Tính thể tích khối chóp SABCDEF .

17. Trong không gian, tính thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu bán kính R và đường cao hình nón là h .

18. Trong không gian, tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu bán kính R .

19. Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp .

20. Với giả thiết của câu 19 và với kết quả đúng của R. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp .

21. Trong không gian, một hình trụ có bán kính đáy là R, đường cao bằng $R\sqrt{3}$. A, B là 2 điểm trên 2 đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $30°$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ .

22. Cho mặt phẳng (P) và điểm A không thuộc (P). Chứng minh rằng mọi mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên (P) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

23. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC, biết SA = SB = a, $\widehat{ASB} = 60^0$, $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{CSA} = 120^0$.

24. Cho hai đường tròn C(O; r) và C'(O'; r') cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').

a. Chứng minh rằng có mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn đó.

b. Tính bán kính R của mặt cầu (S) khi $r = 5$, $r' = \sqrt{10}$, $AB = 6$, $OO' = \sqrt{21}$.

25. Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao.

a. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính bằng bao nhiêu?

b. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có bán kính bằng bao nhiêu?

26. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích các khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi lần lượt quay quanh AB, AC, BC.

a. Tính V_1, V_2, V_3 theo b, c.

b. Chứng minh rằng $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$.

27. Một hình thang cân ABCD có các cạnh đáy AB = 2a, DC = 4a, cạnh bên AD = BC = 3a. Cho hình thang đó (kể cả các điểm trong) quay quanh trục đối xứng của nó. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của khối tròn xoay được tạo thành.

28. Cho tứ diện đều ABCD, AA_1 là một đường cao của tứ diện. Gọi I là trung điểm của AA_1. Mặt phẳng (BCI) chia tứ diện đã cho thành hai tứ diện. Tính tỷ số hai bán kính của hai mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

29. Một khối trụ gọi là nội tiếp trong một khối cầu nếu hai đường tròn đáy của khối trụ nằm trên mặt của khối cầu.

a. Tính thể tích và diện tích xung quanh của khối trụ nội tiếp trong một khối cầu bán kính R nếu biết đường cao của khối trụ là h.

b. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ nội tiếp trong khối cầu có bán kính R cho trước.

c. Tính giá trị lớn nhất của diện tích xung quanh khối trụ nội tiếp trong khối cầu có bán kính R cho trước.

30. Khối nón gọi là nội tiếp trong khối cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy đều nằm trên mặt cầu của khối cầu.

a. Tính thể tích và diện tích xung quanh của khối nón nội tiếp trong khối cầu bán kính R nếu biết đường cao của khối nón là h.

b. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu bán kính R.

c. Tính giá trị lớn nhất của diện tích xung quanh khối nón nội tiếp trong khối cầu bán kính R.

31. Cho tam giác cân ABC có góc BAC = 120^0 và đường cao $AH = a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng Δ vuông góc với (ABC) tại A lấy hai điểm I và J ở về hai phía của điểm A sao cho IBC là tam giác đều và JBC là tam giác vuông cân.

a. Tính theo a độ dài các cạnh của tam giác ABC.

b. Tính theo a độ dài AI, AJ.

c. Chứng minh rằng BIJ, CIJ là các tam giác vuông

d. Xác định tâm và tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC.

e. Xác định tâm và tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC.

32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB; SC; SD. Chứng minh:

a. Các điểm A, B', C', D' đồng phẳng.

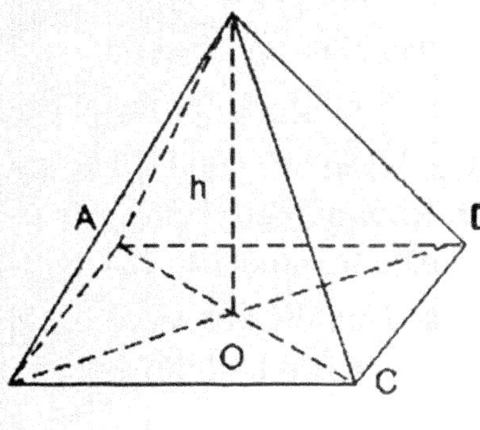
b. Bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu

33. Cho hai điểm A và B cố dịnh, một đường thẳng l thay đổi luôn luôn đi qua A và cách B một đoạn không đổi d. Chứng tỏ rằng l luôn nằm trên một mặt nón tròn xoay.

34. Đường cao của một khối nón bằng 20 (cm), bán kính đáy r = 25(cm). Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và cắt khối nón theo một thiết diện là một tam giác, biết rằng khoảng cách từ tâm của đáy đến thiết diện đó là 12(cm). Tính diện tích thiết diện.

Hướng dẫn

1. Hình nón ngoại tiếp S.ABCD nên hình nón có:



- Bán kính đáy :

$$R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

(Đây cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABCD).

- Chiều cao h = SO nên

$$V(\text{nón}) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{l^2 - h^2})^2.h \;= \frac{1}{3}\pi(l^2 - h^2)h\,.$$

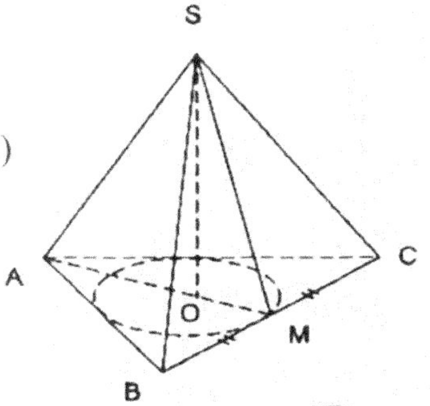
2. Hình nón ở bài 1 có bán kính đáy là $R = \sqrt{l^2 - h^2}$ và đường sinh

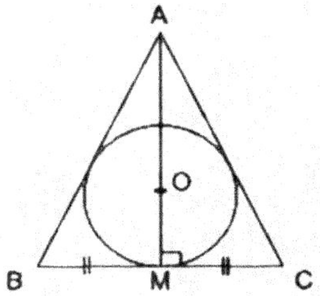
$SA = l \Rightarrow S_{xq}\,(\text{nón}) = \pi R l = \pi l\sqrt{l^2 - h^2}\,.$

3. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC là :r = OM

$= \dfrac{1}{3}.AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

(M là trung điểm của BC)





- Ta có $\begin{cases} OM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow$ Góc giữa mặt bên (SBC) và đáy ABC là $\widehat{SMO} = 60°$.

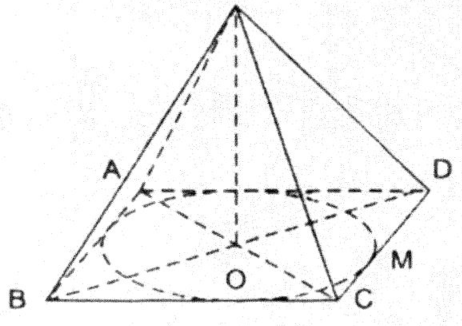
$\Rightarrow SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60° = \dfrac{a}{2}.$

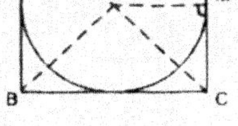
Thể tích của khối nón là : $V = \dfrac{1}{3}.\pi.r^2.SO = \dfrac{1}{3}.\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2.\dfrac{a}{2} = \dfrac{\pi a^3}{72}.$

4. Bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD cạnh bằng a là $r = \dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích khối nón nội tiếp trong hình chóp S.ABCD là :

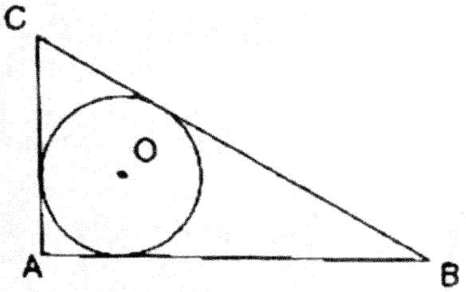
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.SO = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{4}.2a = \frac{\pi a^3}{6}.$$





5. $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$

$= \sqrt{(21a)^2 + (20a)^2} = 29a$.



$\Rightarrow$ Tam giác ABC có:

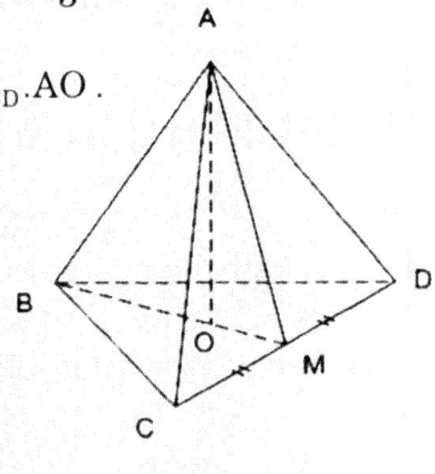
- Diện tích $= \frac{1}{2}.AB.AC = 210a^2$.
- Nửa chu vi $= \dfrac{AB + AC + BC}{2} = 35a$.

$\Rightarrow$ Bán kính của đường tròn (δ) nội tiếp tam giác ABC là:

$r = \dfrac{210a^2}{35a} = 6a$.

$\Rightarrow$ Thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.SO = \frac{1}{3}\pi.(6a)^2.15a = 180\pi a^3$.

6. • $BC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; OM = \dfrac{1}{3}BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; BO = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



- Thể tích của tứ diện ABCD là: $V_1 = \frac{1}{3}.S_{\Delta BCD}.AO$.
- Thể tích của khối nón là: $V_2 = \frac{1}{3}.OM^2.AO$.

Vậy $k = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi.OM^2}{S_{\Delta BCD}} = \dfrac{\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

7. * Thể tích của khối tứ diện ABCD là $V_1 = \frac{1}{3}.S_{\Delta BCD}.AO$.

* Thể tích của khối nón ngọai tiếp ABCD là: $V_3 = \frac{1}{3}\pi.OB^2.AO$.

Vậy $k = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_{ABCD}}{\pi.OM^2} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

8. Hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ có cạnh a cho bởi

$a = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$. Thể tích khối lăng trụ là:

$V = B.h = (R\sqrt{2})^2.2R = 2R^2.2R = 4R^3$

9. Tam giác SAB vuông cân

$\Rightarrow AB = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = h = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

Thiết diện là tam giác cân SBC. Gọi I là trung điểm BC ta có:

$\left.\begin{matrix} SI \perp BC \\ OI \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{SIO} = 60^\circ$ Xét tam giác vuông SOI :

$\sin 60^\circ = \dfrac{SO}{SI} \Rightarrow \dfrac{SO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông SIB: $BI^2 = SB^2 - SI^2 = a^2 - \dfrac{6a^2}{9} = \dfrac{3a^2}{9}$.

$\Rightarrow BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{SBC} = \dfrac{1}{2}SI.BC = SI.BI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

10. Tâm hình cầu ngoại tiếp O là giao điểm của đường cao SH và trung trực của SB. Góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SMH} = \varphi$. Xét tam giác vuông SHM ta có $\tan\varphi = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \dfrac{a}{2}\tan\varphi$.

Xét tam giác vuông SHB ta có:

$SB^2 = SH^2 + HB^2 = \dfrac{a^2}{4}\tan^2\varphi + \dfrac{2a^2}{4}\left(\tan^2\varphi + 2\right)$.

$\Rightarrow SB = \dfrac{a}{2}\sqrt{\tan^2\varphi + 2}$.

Tứ giác OHBI nội tiếp $\Rightarrow$ SO.SH = SI.SB

$$\Rightarrow SO = \frac{SB}{2}.\frac{SB}{SH} = \frac{\frac{a^2}{4}\left(\tan^2\varphi + 2\right)}{2.\frac{a}{2}\tan\varphi} \Rightarrow R = \frac{a\left(\tan^2\varphi + 2\right)}{4\tan\varphi}.$$

11. Gọi H là trung điểm AB

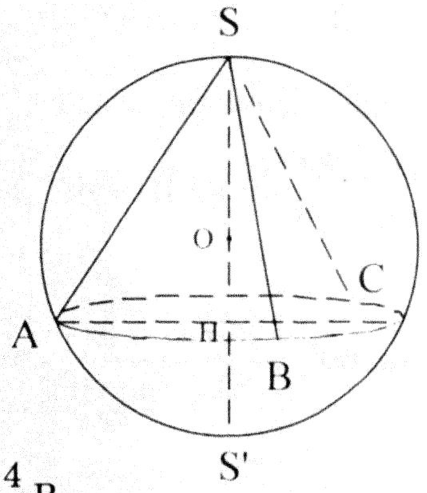
$$\Rightarrow \widehat{BSH} = \alpha \Rightarrow SH = BH.\cot\alpha = \frac{a}{2}.\cot\alpha \Rightarrow S_{xq} = a^2\cot\alpha.$$

Vậy $S_{tp} = a^2 + a^2\cot\alpha = a^2(1 + \cot\alpha)$.

12. Bán kính đáy hình nón là: $R = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha - 1}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi a^3}{12}\sqrt{\cot^2\alpha - 1}.$$



13. Ta có:

$SA = SB = SC = \sqrt{2Rx}$;

$AB = AC = BC = \sqrt{3x(2R - x)}$.

S_{ABC} là tứ diện đều

$$\Leftrightarrow SA = AB \Leftrightarrow 2Rx = 3x(2R - x) \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}R.$$

14. $V = \frac{1}{3}SHdt(\Delta ABC)$; $SH = x = \frac{4}{3}R$;

$dt(\Delta ABC) = \frac{2}{3}R^2\sqrt{3}$ suy ra $V = \frac{8}{27}R^3\sqrt{3}$ (đvtt).

15. Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp

$$V = \frac{1}{3}(dt\Delta ABC + dt\Delta BCD + dt\Delta ABD + dt\Delta ACD).$$

Mặt khác AH là đường cao của tứ diện

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ nên thể tích khối tứ diện

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt). Suy ra :

$$r = \frac{\frac{3a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{4a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow S = 4\pi r^2 = 4\pi(\frac{a\sqrt{6}}{12})^2 = \frac{\pi a^2}{6} \text{ (đvdt)}.$$

16. ΔAOB đều cạnh R $\Rightarrow IO = R\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΔSOI vuông tại O cho ta: $SO = IO \tan\alpha = \frac{R\sqrt{3}}{2}\tan\alpha$.

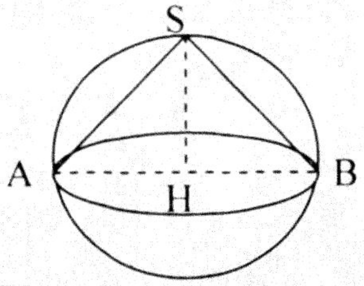
$dt_{\Delta AOB} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ $\Rightarrow$ dt lục giác đều $S = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}SO.S = \frac{1}{3}\frac{R\sqrt{3}}{2}\tan\alpha.\frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}R^3\tan\alpha$.

17. Đường cao của khối nón: SH = h

$r = AH = \sqrt{h(2R-h)}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)$.



18. Đường cao của khối nón là:

SH = h, bán kính đáy $r = AH = \sqrt{h(2R-h)}$.

$SA = \sqrt{2Rh}$; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)$.

Đặt V = S(h), 0 < h < 2R ;

$$f'(h) = \frac{4}{3}(4Rh - 3h^2); f'(h) = 0. \Leftrightarrow h = 0, h = \frac{4R}{3}.$$

h	0		4R/3		2R
f'(h)		+	0	–	
f(h)		↗	$\frac{32\pi R^3}{81}$	↘	

h là chiều cao của khối chóp. Ta có $V = \frac{\pi}{3}h^2(2R-h) = f(h)$;

0 < h < 2R. Vậy lập bảng biến thiên ta có:

$$V\max = \frac{32\pi R^3}{81} \text{ khi } h = \frac{4R}{3}.$$

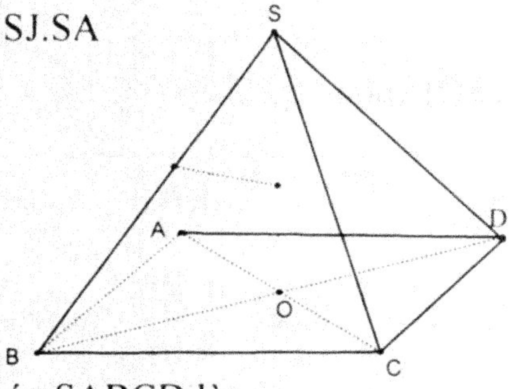
19. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD

$\Rightarrow SO \perp (ABCD); SAO = 60^0$.

Gọi I là giao trung trực của SA trong mặt phẳng (SAO) và SO ta có: IA = IB = IC = ID

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD và R = SI.

Tứ giác OIJA nội tiếp nên SI.SO = SJ.SA



$$\Leftrightarrow SI = \frac{SJ.SA}{SO} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}.$$

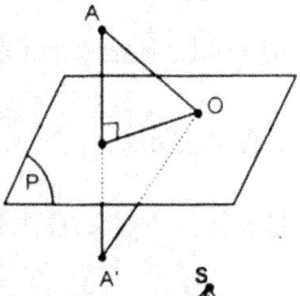
$$= \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

20. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \text{Do } R = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27} \text{ (đvtt).}$$

21. $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi R^2\sqrt{3} + 2\pi R^2 = 2\pi R^2(\sqrt{3} + 1)$ (đvdt).

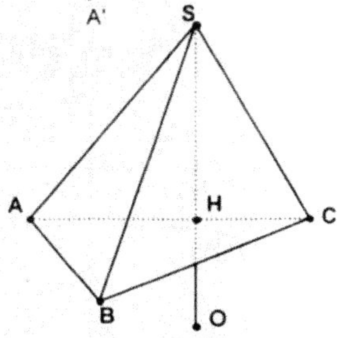
22. Giả sử S là mặt cầu đi qua A và có tâm O $\in$ (P) thì OA' = OA nên mặt cầu S cũng đi qua A'. Vậy các mặt cầu S đi qua hai điểm cố định A và A'



23. Từ giả thiết suy ra AB = a, BC = a$\sqrt{2}$ và AC = a$\sqrt{3}$. Như vậy ΔABC vuông ở B.

Gọi SH là đường cao của hình chóp.

Do SA = SB = SC, nên HA = HB = HC hay H là trung điểm của cạnh AC. Gọi O là điểm đối xứng với S qua H thì OS = OA = OC = OB = a, suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có tâm O và bán kính R = a.



24. a. Gọi M là trung điểm của AB thì OM $\perp$ AB, O'M $\perp$AB. Do (P) và (P') phân biệt nên ba điểm O, M, O' không thẳng hàng. Từ đó AB $\perp$ mp(OMO'). (1)

Gọi Δ và Δ' lần lượt là trục của đường tròn C(O; r) và C'(O'; r') thì Δ và Δ'cùng vuông góc với AB (2). Từ (1) và (2) suy ra Δ và

Δ' cùng nằm trong mp(OMO'), Δ và Δ' cắt nhau tại điểm I. Khi đó mặt cầu (C) có tâm I và bán kính R = IB là mặt cầu phải tìm.

b. Dễ thấy OM = 4, O'M = 1. Xét $\Delta OMO'$ ta có:

$$OO'^2 = OM^2 + O'M^2 - 2OM.O'M.\cos\widehat{OMO'} \Rightarrow \cos\widehat{OMO'} = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{OMO'} = 120^0 \text{ và } \widehat{OIO'} = 60^0.$$

Tương tự $\cos\widehat{MO'O} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ do đó $\sin\widehat{OO'I} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác OIO' ta có:

$$\frac{OI}{\sin\widehat{OO'I}} = \frac{OO'}{\sin\widehat{OIO}} = \frac{OI}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OI = 2\sqrt{3}.$$

Vậy $R^2 = IB^2 = OB^2 + OI^2 = 37$ hay $R = \sqrt{37}$.

25. Theo đề ra hình nón có bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$, có chiều cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, có đường sinh l = a, nên nó có diện tích toàn phần S và thể tích V là:

$$S = \pi rl + \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2,$$

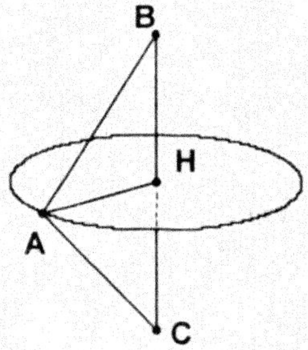
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}.$$

a. Nếu mặt cầu bán kính R có diện tích bằng diện tích toàn phần S của hình nón thì: $4\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi a^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b. Nếu mặt cầu bán kính R có thể tích bằng thể tích V của hình nón thì:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24} \Rightarrow R = \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}a.$$

26. a. Khi quay tam giác ABC quanh AB ta được khối nón có đường cao c và bán kính đáy là b, nên nó có thể tích $V_1 = \frac{1}{3}\pi cb^2$. Khi quay tam giác ABC quanh AC ta được khối nón có đường cao b và bán kính đáy là c, nên có



thể tích $V_2 = \frac{1}{3}\pi bc^2$. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC, khi quay tam giác ABC quanh BC ta được khối tròn xoay hợp thành của hai khối nón sinh ra bởi tam giác ABH khi quay quanh BC. Vậy ta có:

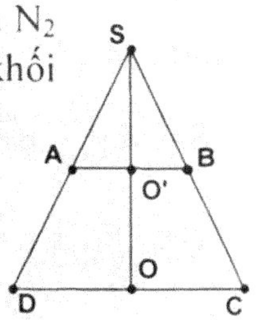
$$V_3 = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi.AH^2.CH = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC \ .$$

vì $AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ và $BC = \sqrt{b^2+c^2}$ nên $V_3 = \frac{1}{3}\frac{\pi b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

b. Ta có:

$$\frac{1}{V_3^2} = \frac{9(b^2+c^2)}{\pi^2b^4c^4} = \frac{9b^2}{\pi^2b^4c^4} + \frac{9c^2}{\pi^2b^4c^4} = \left(\frac{3}{\pi c^2 b}\right)^2 + \left(\frac{3}{\pi b^2 c}\right)^2 = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$

27. Gọi S là giao điểm của hai cạnh bên AD và BC của hình thang. Đường cao SO của tam giác cân SCD là trục đối xứng của hình thang do đó SO cắt AB tại trung điểm O' của AB. Khi quay quanh SO, ΔSCD sinh ra khối nón N_1 có thể tích V_1, ΔSAB sinh ra khối nón N_2 có thể tích V_2, còn hình thang ABCD sinh ra một khối tròn xoay H có thể tích $V = V_1 + V_2$.



Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.OC^2.SO - \frac{1}{3}\pi.O'B^2.SO'$

$= \frac{1}{3}\pi.4a^2.SO - \frac{1}{3}\pi a^2.SO' = \frac{1}{3}\pi a^2(4SO - SO')$

Do AB là đường trung bình của tam giác SCD nên SB = 3a, do đó $SO' = \sqrt{SB^2 - O'B^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$ và $SO = 2\ SO' = 4\sqrt{2}a$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi a^2(16\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}a) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

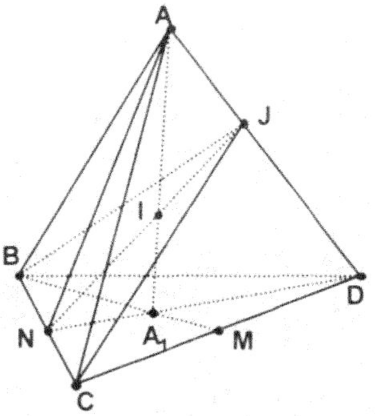
Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của khối nón N_1 và N_2 thì diện tích xung quanh của khối tròn xoay **H** là:

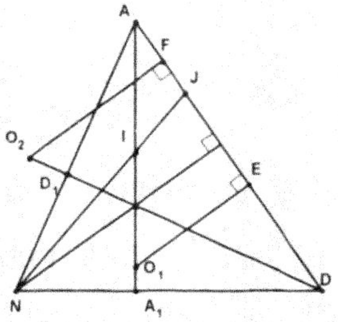
$S_{xq} = S_1 - S_2 = \pi.OC.SC - \pi.O'B.SB = 9\pi a^2$.

Cộng thêm diện tích của hai hình tròn đáy của **H** ta được diện tích toàn phần của **H** là: $S_{tp} = 9\pi a^2 + \pi a^2 + 4\pi a^2 = 14\pi a^2$.

28. Gọi N là trung điểm BC và J là giao điểmcủa NI với AD, khi đó mp(BCI) chia tứ diện đã

cho thành hai tứ diện BCDJ và ABCJ. Để thấy $AJ = \frac{1}{4}AD$. Vì $AA_1 \perp mp(BCD)$ nên mọi điểm của AA_1 cách đều B, C, D, khi đó tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BCDJ là giao điểm của AA_1 với đường trung trực của JD (xét trong mp (AA_1D)). Tương tự tâm O_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCJ là giao điểm của DD_1 với đường trung trực của AJ (xét trong mp (ADD_1), DD_1 là đường cao kẻ từ đỉnh D của tứ diện ABCD). Xét tứ giác nội tiếp O_1A_1DE ta có:





$$AE.AD = AO_1.\ AA_1 \Rightarrow AO_1 = \frac{AE.AD}{AA_1}.$$

Mặt khác $AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $AE = \frac{a}{4} + \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}$,

do đó $AO_1 = \frac{5a\sqrt{6}}{16}$ và $A_1O_1 = A_1A - AO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{5a\sqrt{6}}{16} = \frac{a\sqrt{6}}{48}$.

Vậy bán kính R_1 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện BCDJ là:

$$R_1^2 = O_1D^2 = A_1O_1^2 + A_1D^2 = \frac{6a^2}{48^2} + \frac{3a^2}{9} = \frac{129a^2}{48.8} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}}.$$

Tứ giác O_2D_1FA nội tiếp đường tròn nên: $DD_1.DO_2 = DF.DA$ $\Rightarrow DO_2 = \frac{DF.DA}{DD_1}$. Mặt khác $DF = \frac{3a}{4} + \frac{a}{8} = \frac{7a}{8}$, $DA = a$,

$DD_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Nên $DO_2 = \frac{7a\sqrt{6}}{16}$ $\Rightarrow$ $D_1O_2 = \frac{7a\sqrt{6}}{16} - \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{5a\sqrt{6}}{48}$,

Do đó bán kính R_2 của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCJ là:

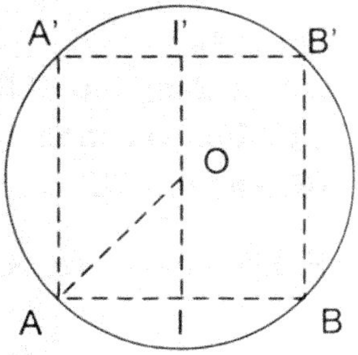
$$R_2^2 = O_2A^2 = O_2D_1^2 + D_1A^2 = \frac{25a^2.6}{48^2} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{153a^2}{48.8}.$$

Từ đó $R_2 = \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}}$. Vậy $\frac{R_1}{R_2} = \frac{a\sqrt{129}}{8\sqrt{6}} : \frac{a\sqrt{153}}{8\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{43}{51}}$.

29. Coi hình vẽ một thiết diện qua tâm của khối cầu và qua trục của khối trụ nội tiếp trong khối cầu.

- Mặt của khối cầu cho thiết diện là một đường tròn lớn của mặt cầu có tâm O bán kính R
- Khối trụ nội tiếp cho thiết diện là một hình chữ nhật ABB'A' nội tiếp đường tròn (O) với AB = A'B' = 2r là các đường kính đáy và II' là đường cao của khối trụ.

a) Thể tích V và diện tích xung quanh S_{xq} của khối trụ:



- Tam giác OIA cho: $r^2 = AI^2 = OA^2 - OI^2$

$= R^2 - \frac{h^2}{4}$ Hay $r = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2}(h < 2R)$.

- Ta có: $V = \pi r^2 h = \frac{\pi h(4R^2 - h^2)}{4}$.
- $S_{xq} = 2\pi rh$; $S_{xq} = \pi h.\sqrt{4R^2 - h^2}$.

b) Tính giá trị lớn nhất của thể tích V

- Coi $V = \frac{\pi}{4}\left[4R^2.h - h^3\right] = f(h)$ với $0 < h < 2R$.

Ta có: $f'(h) = \frac{\pi}{4}\left[4R^2 - 3h^3\right]$ suy ra

$f'(h) = 0 \Leftrightarrow 4R^2 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

h	0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		2R
f'(h)	+		0	–	
f(h)		↗		↘	

- $f_{max} = f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{8R^3}{\sqrt{3}} - \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}\right] = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

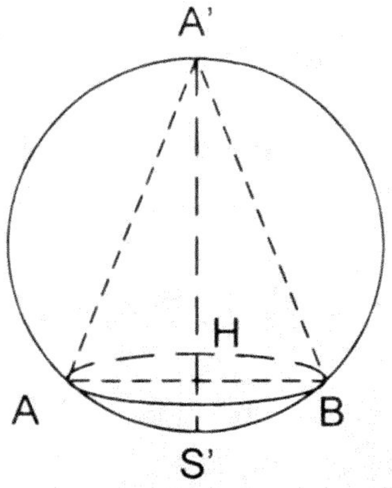
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là: $V_{max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

c) Tính giá trị lớn nhất của diện tích xung quanh S_{xq}

- $\left(S_{xq}\right)_{max} \Leftrightarrow \left(S^2{}_{xq}\right)_{max}$.
- $\left(S^2{}_{xq}\right)_{max} = \pi^2.\left[h^2\left(4R^2 - h^2\right)\right]$ (do Cauchy).

$< \pi^2\left[\dfrac{h^2 + 4R^2 - h^2}{2}\right] = 4\pi^2R^4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:



$h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow h^2 = 2R^2 \Leftrightarrow h = R\sqrt{2}$.

Vậy $\left(S_{xq}\right)_{max} = 2\pi R^2$.

30. Coi hình vẽ một thiết diện qua tâm của khối cầu và qua trục của khối nón nội tiếp trong khối cầu:

- Mặt của khối cầu cho thiết diện là một đường tròn (O) tâm O bán kính R
- Khối nón nội tiếp thiết diện là tam giác cân SAB với S là đỉnh và AB là đường kính đáy của khối nón.

a. Tính thể tích V và diện tích xung quanh S_{xq} của khối nón:

Đường cao của khối nón là SH = h. Bán kính đáy r = AH $= \sqrt{h.(2R - h)}$. Đường sinh l = SA = $\sqrt{2Rh}$.

Thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2h = \dfrac{1}{3}\pi h^2\left(2R(2R - h)\right)$.

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi lr = \pi h.\sqrt{2R.(2R - h)}$.

b. $V = \dfrac{\pi}{3}.h^2(2R - h) = f(h)$ với $0 < h < 2R$.Ta có:

$f'(h) = \dfrac{\pi}{3}\left[4Rh - 3h^2\right]; f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$ hay $h = \dfrac{4R}{3}$.

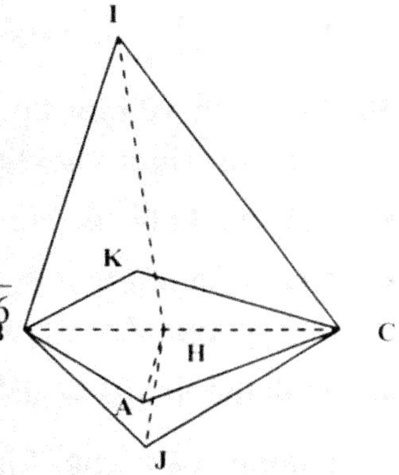
h	0	$\dfrac{4R}{3}$	2R
f'(h)	+	0	–
f(h)	↗	$\dfrac{32\pi R^3}{81}$	↘

$$V_{max} = f\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

c. Tính giá trị lớn nhất của S_{xq}:

- S_{xq} lớn nhất khi $\left(S^2{}_{xq}\right)_{max}$ lớn nhất.
- $\left(S^2{}_{xq}\right) = 2\pi R\left[h^2(2R - h)\right] = g(h)$ với $0 < h < 2R$.
- Lí luận như câu b ta có: $g_{max} = g\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{64\pi^2R^4}{27}$.

Nên $S_{xq\,max} = \frac{8\pi R^2}{3\sqrt{3}}$.



31. a. Theo giả thiết, tam giác ABC cân nên H là trung điểm của BC. Trong tam giác ABH có:

$$BH = AH.tg60^0 = a\sqrt{2}.\sqrt{3} = a\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a\sqrt{6}$$

Trong tam giác AHC có:

$$AC = \frac{AH}{\cos 60^0} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow AC = AB = 2\sqrt{2}a,$$

b. Theo giả thiết, tam giác đều IBC, từ $AH \perp BC$ suy ra $IH \perp BC$ và có thể tính được $IH = \frac{BC.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}a$

Trong tam giác vuông IAH có:

$IA^2 = IH^2 - AH^2 = \left(3\sqrt{2}a\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 16a^2 \Rightarrow IA = 3\sqrt{2}a$

Trong tam giac vuông cân JBC có: $JH = BH = a\sqrt{6}$.

Trong tam giác vuông JAH có:

$JA^2 = JH^2 - AH^2 = \left(a\sqrt{6}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 4a^2 \Rightarrow JA = 2a$ (2)

c. Từ (1) và (2) ta có: $IJ = JA + AI = 6a$ (3)

$BI = BC = 2a\sqrt{6}$ (4)

$BJ = \frac{BC.\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}a$ (5)

từ (3), (4) và (5) ta có: $BI^2 + BJ^2 = \left(2a\sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}a\right)^2 = 36a^2 - \pi^2$

⇒ Tam giác BJI vuông tại B.

Do $\Delta CJI = \Delta(c.c.c)$ nêu tam giác CJI cũng là tam giác vuông tại C.

d. Coi tam giác BJI là đáy của tứ diện CIBJ.

Gọi K là trung điểm của IJ ⇒ k là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác BJI. Chứng minh tương tự thì K cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CJI.

$\Rightarrow KI = KJ = KB = KC \Rightarrow$ K là tâm đương tròn $\Rightarrow KI = \dfrac{JI}{2} = 3a.$

e. Bằng cách tương tự bạn đọc có thể tự tìm tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC.

32. a. Ta có $BC \perp (SAB)$(theo giả thiết), suy ra $BC \perp AB'$. Mặt khác $AB' \perp SB$ (theo giả thiết), suy ra $AB' \perp (SBC)$, suy ra $AB' \perp SC$.

Tương tự suy ra $AD' \perp SC$.

Từ đó $SC \perp (AB'D')$

Gọi I là giao điểm của SO với B'D',

gọi C' giao cua AI với SC thì AC' thuộc (AB'D') trên $AC' \perp SC$.

Từ đó, A, B', C', D' cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Tức là các điểm A, B', C', D' đồng phẳng.

b. Theo giả thiết ta có: $AB \perp BC$, $AD \perp DC$

Theo chứng minh trên ta có $AB' \perp BC, AD' \perp D'C, AC' \perp C'C$.

Từ đó các điểm A, B, C, D, B', C', D'cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông, do đó chúng cùng thuộc mặt cầu đường kính AC.

33. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B trên đường thẳng $l \Rightarrow BH = d$.

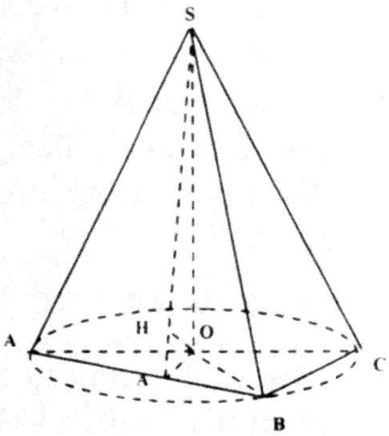
Gọi $\widehat{BAH} = \alpha$, trong tam giác ABH có: $\sin\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{d}{AB}$.

Vì A, B là hai điểm cố định cho trước nên độ dài của đoạn thẳng AB không đổi, suy ra tỉ số $\dfrac{d}{AB}$. là không đổi, từ đó độ lớn của góc α không đổi. Như vậy, đường thẳng l thay đổi nhưng luôn tạo với đường thẳng AB một góc α không đổi (sao cho $\sin\alpha = \dfrac{d}{AB}$.)

Vậy, đường thẳng l luôn nằm trên một mặt nón tròn xoay có trục là đường thẳng AB và đường sinh nghiệm với trục một góc α sao cho $\sin\alpha = \dfrac{d}{AB}$.

34. Giả sử có thiết diện là tam giác cân SAB, đường cao hình nón là SO, như hình trên. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB ta có $OI \perp AB$.

Mặt khác $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SIO)$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên đường thẳng SI thì $AB \perp OH$ và $SI \perp OH$, suy ra $OH \perp (SAB)$, hay OH chính là khoảng cách từ tâm O tới mặt phẳng thiết diện (SAB).

Theo giả thiết ta có OH = 12 (cm).

Trong tam giác SOI có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{SO^2 - OH^2}{SO^2.OH^2} = \frac{20^2 - 12^2}{20^2.12^2} = \frac{16}{15} \Rightarrow OI^2 = \frac{15}{16}$$

$$SI^2 = SO^2 + OI^2 = 20^2 + \frac{15}{16} = \frac{6415}{16} \Rightarrow SI = \frac{\sqrt{6415}}{4}(cm)$$

Trong tam giác AOI:

$$AI^2 = AO^2 - OI^2 = 25^2 - \frac{15}{16} = \frac{9985}{16}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{\sqrt{9985}}{4}(cm) \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{9985}}{2}(cm).$$

Vậy $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.SI.AB = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6415}}{4}.\frac{\sqrt{9985}}{2} = \frac{\sqrt{6415.9985}}{16}(cm^2)$.

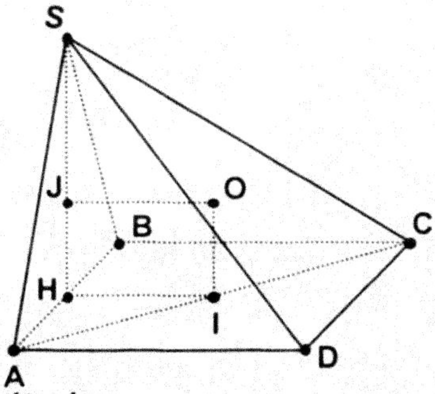
ĐỀ KIỂM TRA (15')

ĐỀ SỐ 1.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và mp(SAB) vuông góc với mp(ABCD). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Đáp án

Kẻ SH là đường cao của hình chóp thì H là trung điểm AB. Gọi I là tâm hình vuông ABCD, J là trọng tâm tam giác đều SAB, và O là điểm sao cho JOIH là hình chữ nhật. Khi đó OS = OA = OB (vì OJ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB) và OA = OB = OC = OD (vì OI là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD).



Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là R = OA. Ta có $OA^2 = AI^2 + OI^2$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{7a^2}{12}.\ \text{Vậy } R = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

ĐỀ SỐ 2.

Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O; R) và (O'; R), $OO' = R\sqrt{3}$.
Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn (O; R).

a. Tính tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

b. Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, tính tỷ số thể tích hai phần đó.

Đáp án

a. Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$.

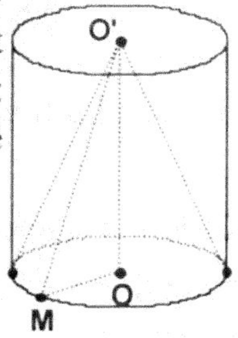
Lấy một đường sinh O'M của hình nón thì

$$M = \sqrt{O'O^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R.$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_2 = \pi R.2R = 2\pi R^2$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$.

b. Khối trụ và khối nón có cùng đáy và cùng chiều cao nên thể tích khối trụ bằng ba lần thể tích khối nón. Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần: khối nón và phần còn lại có thể tích bằng hai lần thể tích khối nón. Vậy tỷ số thể tích hai phần đó là $\frac{1}{2}$.



ĐỀ KIỂM TRA (45')

ĐỀ SỐ I.

A. Bài tập trắc nghiệm

1. Một mặt cầu bán kính R đi qua 8 đỉnh của một hình lập phương. Cạnh a của hình lập phương đó theo R là:

A. $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}R}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}R}{3}$.

2. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng 60^0. Bán kính mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp S.ABCD là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

B. Bài tập tự luận

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, BC = b, đường cao của hình chóp là SA. Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD.

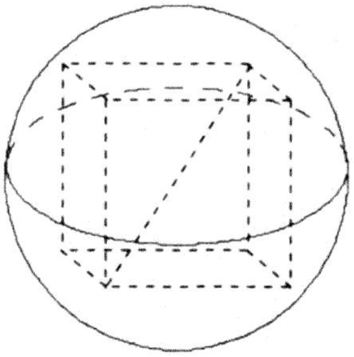
a. Chứng minh các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng vuông góc với SC.

b. Chứng minh các điểm A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt cầu. Xác định tâm và diện tích mặt cầu.

c. Chứng minh rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó khi SA = AC.

Đáp án

1. Câu A.



Ta có đường chéo của hình lập phương là một đường kính của mặt cầu, do đó có:

$(2R)^2 = 3a^2 \Rightarrow a = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$.

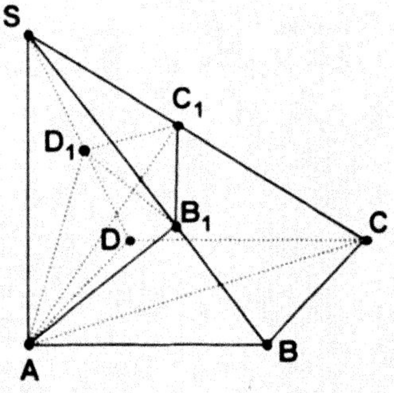
2. Câu C.

Theo đầu bài ta có tam giác SAC là tam giác đều, do đó $SC = AC = a\sqrt{2}$.

Đường kính hình cầu $SS' = SC.\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra bán kính hình cầu là $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

3. a. Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $AB_1 \perp BC$, ngoài ra $AB_1 \perp SB$ nên $AB_1 \perp (SBC)$. Vậy $AB_1 \perp SC$. Tương tự $AD_1 \perp SC$. Theo đề ra ta có $AC_1 \perp SC$. Vậy các đường thẳng AB_1, AC_1, AD_1 cùng vuông góc với SC, từ đó các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng vuông góc với SC.



b. Theo câu a) thì $AB_1 \perp mp(SBC)$, từ đó $\widehat{AB_1C} = 90^0$. Tương tự $\widehat{AD_1C} = 90^0$.

Vậy các điểm A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 nằm trên mặt cầu đường kính AC. Tâm mặt cầu là tâm O của hình chữ nhật ABCD.

Bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ nên diện tích mặt cầu là $S = 4\pi(a^2 + b^2)$.

c. Theo câu a) bốn điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng nằm trên một mặt phẳng. Mặt khác bốn điểm đó cùng nằm trên mặt cầu nên $AB_1C_1D_1$ là tứ giác nội tiếp. Tứ giác đó có góc B_1 và D_1 vuông nên AC_1 là đường kính của đường tròn ngoại tiếp.

Vì $SA = AC = \sqrt{a^2 + b^2}$ nên $AC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy đường tròn đó có bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2 + b^2}$.

ĐỀ SỐ 2

1. Cho một hình nón có đường cao bằng 12cm, bán kính đáy là 16cm. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

2. Cắt hình nón **N** đỉnh S cho trước bởi một mặt phẳng đi qua trục của nó ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của N.

b. Cho một dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp(SBC) tạo với đáy hình nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

c. Tính diện tích và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón.

Đáp án

1. Gọi l là đường sinh của hình nón, ta có

$$S_{xq} = \pi R.l = \pi.16.\sqrt{12^2 + 16^2} = 320\pi(cm).$$

2. a. Giả sử cắt hình nón N bởi mặt phẳng đi qua trục SO của nó ta được tam giác vuông cân SAB. Từ giả thiết suy ra hình nón **N** có bán kính đáy là $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, chiều cao $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường sinh $l = a$.

Vậy: $S_{xq} = \pi Rl = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$; $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \frac{(\sqrt{2} + 1)\pi a^2}{2}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}.$$

b. Giả sử thiết diện là tam giác SBC. Kẻ OH $\perp$BC thì SH $\perp$BC và $\widehat{SHO} = 60^0$. Nên $SH = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$,

$$H = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Vậy diện tích tam giác SBC là $S = SH.HB = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

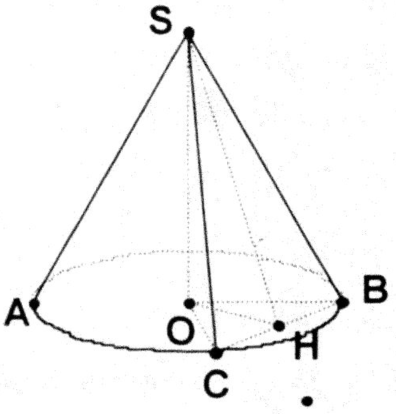
c. Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo một đường tròn lớn nội tiếp tam giác SAB, vậy bán kính r của mặt cầu đó bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB. Suy ra

$$r = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB + 2SA} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} + 2a} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}.$$

Vậy mặt cầu nội tiếp có diện tích :

$S = 4\pi r^2 = \pi a^2(2 - \sqrt{2})^2$ và có thể tích

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi(2 - \sqrt{2})^3 a^3}{6}.$$



Chương III.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Kiến thức cần nhớ

1. Hệ tọa độ trong không gian:

Hệ tọa độ gồm 3 trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.

Nếu ta lấy 3 vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt nằm trên Ox, Oy, Oz thì:

$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$

$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$

2. Tọa độ của điểm và vectơ

Trong không gian Oxyz:

Điểm $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Vectơ $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Cho $A(x_1;\ y_1;\ z_1); B(x_2;\ y_2;\ z_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

3. Vectơ bằng nhau. Tọa độ của vectơ tổng, hiệu

Cho $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1); \vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$

a. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$.

b. $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

c. $k\vec{u} = (kx_1; ky_1; kz_1)\quad k \in R$.

d. $m\vec{u} + n\vec{v} = (mx_1 + nx_2; my_1 + ny_2; mz_1 + nz_2)$; $m, n \in R$.

4. Hai vectơ cùng phương

$\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $(\vec{u} // \vec{v})(\vec{u} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow k \in R : \vec{v} = k\vec{u}$ tức là:

$$\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \\ z_2 = kz_1 \end{cases} \text{ hay } \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} \qquad (x_1, y_1, z_1 \neq 0).$$

5. Chia đoạn thẳng theo tỉ số cho trước

Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq 1)$

Khi $A = (x_1;\, y_1;\, z_1); B = (x_2;\, y_2;\, z_2)$; ta có $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_1 - kz_2}{1-k} \end{cases}$.

Đặt biệt, nếu $k = -1$ thì M là trung điểm của đoạn AB và

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2};\ \frac{z_1 + z_2}{2}).$$

6. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho vectơ $\vec{u} = (x_1;\, y_1;\, z_1)$; $\vec{v} = (x_2;\, y_2;\, z_2)$

a. $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}.\vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

b. $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

c. $A(x_A;\, y_A;\, z_A), B(x_B;\, y_B;\, z_B)$.

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

d. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x^2_1 + y^2_1 + z^2_1}.\sqrt{x^2_2 + y^2_2 + z^2_2}}; |\vec{u}| \neq 0, |\vec{v}| \neq 0$.

e. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

7. Tích có hướng của 2 vectơ

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1;\, y_1;\, z_1)$;

$\vec{v} = (x_2;\, y_2;\, z_2)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$, kí hiệu $[\vec{u}, \vec{v}]$ được xác định bởi:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Khi đó: $*\left[\vec{u},\vec{v}\right]\perp\vec{u}$; $\left[\vec{u},\vec{v}\right]\perp\vec{v}$; $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\vec{u},\vec{v})$.

* $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right]=0$.

* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=0$.

8. Các ứng dụng

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

$$V_{\text{hộp } ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|.$$

$$V_{\text{chóp}ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|.$$

9. Mặt cầu

Mặt cầu tâm I = (a; b; c) , bán kính R có phương trình:

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Ngược lại, phương trình: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu nếu có điều kiện $a^2+b^2+c^2>d$

Khi đó I (–a; –b; –c) là tâm mặt cầu và $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$ là bán kính mặt cầu.

- Nếu $a^2+b^2+c^2=d$, phương trình trên xác định một điểm duy nhất I (–a ; –b; –c).
- Nếu $a^2+b^2+c^2<d$, không có điểm nào thỏa mãn phương trình.

Chú ý: Trong cuốn sách này, khi nói đến vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó lần lượt là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz trong hệ trục tọa độ Oxyz.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Các bài toán về vectơ trong không gian

(Tọa độ các vectơ, tọa độ điểm, các phép toán về vectơ, tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của hình tam giác, trọng tâm của tứ diện, góc giữa hai vectơ)

Ví dụ 1: Trong không gian (Oxyz), cho $\vec{a} = (-1; 3; 5)$;

$\vec{b} = (2m^3 + m + 56; m^2 + 2m; m^4 + m^3 - 49)$.

Tìm giá trị m để $\vec{a} = \vec{b}$.

Giải:

Ta có: $\vec{a} = (x; y; z)$; $\vec{b} = (x'; y'; z')$;

Khi đó $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x = x'; y = y'; z = z'$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2m^3 + m + 56 = -1 \\ m^2 + 2m = 3 \\ m^4 + m^3 - 49 = 5 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta có $m = -3$

Vậy $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow m = -3$.

Ví dụ 2: Trong không gian (Oxyz), cho hai vectơ $\vec{u} = (3; -6; 2)$;

$\vec{v} = (m^2 + m)\vec{i} + 2m\vec{j} + (m^2 + 2m)\vec{k}$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$, biết $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Giải:

Ta có: $\vec{v} = (m^2 + m)\vec{i} + 2m\vec{j} + (m^2 + 2m)\vec{k}$.

$\Leftrightarrow \vec{v} = (m^2 + m; 2m; m^2 + 2m)$. Do đó $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Hay $3(m^2 + m) - 6(2m) + 2(m^2 + 2m) = 0$.

$\Leftrightarrow 3m^2 + 3m - 12m + 2m^2 + 4m = 0$.

$\Leftrightarrow 5m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

* Khi $m = 0$ ta có: $\vec{v} = \vec{0}$ (loại).

* Khi $m = 1$ ta có: $\vec{v} = (2; 2; 3) \neq \vec{0}$.

Vậy với $m = 1$ thì $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ví dụ 3: Trong không gian (Oxyz), cho $\vec{a} = (m + 5; 2m; -m)$; $\vec{b} = (3; 6; -2)$.

Tìm m để $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Giải:

Ta có:

$|\vec{a}| = \sqrt{(m+5)^2 + 4m^2 + m^2} = \sqrt{6m^2 + 10m + 25}$ $|\vec{b}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$.

Vậy $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$,

Hay $6m^2 + 10m + 25 = 49 \Leftrightarrow 6m^2 + 10m - 24 = 0$.

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 5m - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Vậy với $m = -3$ hoặc $m = \dfrac{4}{3}$ thì $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Ví dụ 4: Trong không gian (Oxyz), cho $\vec{v} = (2a - 1; a^2; a + 8)$. Xác định a để $|\vec{v}|$ bé nhất và tìm min $|\vec{v}|$.

Giải:

Ta có: $|\vec{v}| = \sqrt{(2a-1)^2 + a^2 + (a+8)^2} = \sqrt{6(a+1)^2 + 59} \geq 59$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = -1$. Vậy min$|\vec{v}| = 59$ khi $a = -1$.

Ví dụ 5: Trong không gian (Oxyz), cho $\vec{u} = (1; 1; -4)$; $\vec{v} = (2; -4; m)$

Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng 45°.

Giải:

Ta có: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{1 - 4m}{3\sqrt{2}\sqrt{m^2 + 5}}$.

Mặt khác $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Do đó ta có: $\dfrac{1 - 4m}{3\sqrt{2}\sqrt{m^2 + 5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 - 4m = 3\sqrt{m^2 + 5}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 4m)^2 = 3\sqrt{m^2 + 5} \\ 1 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ 7m^2 - 8m - 44 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \dfrac{22}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy với m = –2 thì góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng 45°.

Ví dụ 6: Trong không gian (Oxyz), cho 4 điểm A(0; 2; –2); B(–3; 1; –1) C(4; 3; 0); D(2; 1;–2). Chứng minh rằng ABCD là một tứ diện và tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện.

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;\ 1)$; $\overrightarrow{AC} = (4;\ 1;\ 2)$; $\overrightarrow{AD} = (2;-1;0)$.

Để chứng minh ABCD là một tứ diện ta chứng minh 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng hay chứng minh 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng. Giả sử $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng: khi đó tồn tại 2 số m, n sao cho: $m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Suy ra $\begin{cases} -3m + 4n = 2 \\ -m + n = -1 \\ m + 2n = 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình này vô nghiệm. Vậy $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng nên ABCD là một tứ diện.

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) \\ y_G = \dfrac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) \\ z_G = \dfrac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{3}{4} \\ y_G = \dfrac{7}{4} \\ z_G = -\dfrac{5}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } G = \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}; -\dfrac{5}{4}\right).$$

Ví dụ 7: Trong không gian (Oxyz), cho tam giác ABC với A(2; 0; – 5), B(–1; 5; –4), C(4; 2; –9). Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;\ 5;\ 1)$; $\overrightarrow{BC} = (5;-3;-5)$; $\overrightarrow{CA} = (-2;-2;\ 4)$.

Từ đó suy ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 6 + (-10) + 4 = 0. \Rightarrow AB \perp CA$

Suy ra Δ ABC vuông ở A. Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm I của BC nên tọa độ I là:

$I = (\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{13}{2})$. Vậy tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $I = (\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{13}{2})$.

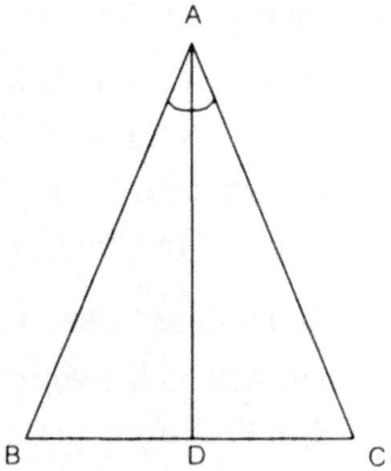
Ví dụ 8: Trong không gian (Oxyz), cho Δ ABC với A(–2; 0; –3), B(–4; 1; –1), C (–4; 4; 1), AD là phân giác trong góc A của ΔABC $D \in BC$. Tìm tọa độ điểm D.

Giải:

Ta có: $AB = \sqrt{(-4+2)^2 + 1^2 + (1-3)^2} = 3,\quad AC = 6$.

Theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DC = 2DB$.



Do $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ là 2 vectơ ngược hướng nên ta có:

$\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{x_C + 2x_B}{1+2} = \dfrac{-4 + 2(-4)}{3} = -4 \\ y_D = \dfrac{y_C + 2y_B}{1+2} = \dfrac{-4 + 2.1}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ z_D = \dfrac{z_C + 2z_B}{1+2} = \dfrac{1 + 2.(-1)}{3} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy $D = (-4; \frac{-2}{3}; \frac{-1}{3})$.

Ví dụ 9: Trong không gian (Oxyz), cho ΔABC có A(1; –3; 0); B(1; – 6; 4); C(13; –3; 0). Tìm bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; -3; 4) \Rightarrow AB = 5$;

$\overrightarrow{BC} = (12; 3; -4) \Rightarrow BC = 13$;

$\overrightarrow{CA} = (-12;\ 0;\ 0) \Rightarrow CA = 12$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 0.(-12) + (-3).0 + 4.0 = 0$.

Suy ra $AB \perp CA$ hay tam giác ABC vuông ở A.

Diện tích Δ ABC là: $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.5.12 = 30$.

Nữa chu vi của tam giác ABC là: $P = \frac{5+13+12}{2} = 15$.

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là: $r = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2$.

Dạng 2: Tích có hướng và các ứng dụng của nó

1. Tích có hướng của hai vectơ

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$, kí hiệu $[\vec{u}, \vec{v}]$ được xác định bởi:

$$\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Ví dụ: Trong không gian,cho $A = (-1;\ 2;\ 1)$, $B = (1;\ 1;\ 1)$ $C = (0;\ 3;\ 2)$

Tính tích có hướng của $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$

Giải:

$A = (-1; 2; 1); B = (1; 1; 1); C = (0; 3; 2)$ suy ra

$\overrightarrow{AB} = (2; -1; 0)$; $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; 1)$ $\Rightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-1; -2; 3)$.

2. Điều kiện đồng phẳng

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{u}.\vec{v}\right].\vec{w} = 0$

Ví dụ 1: Cho ba vectơ $\vec{u} = \left(x^2;\ x;\ x^2 - 5\right)$, $\vec{v} = (-4;\ 2;\ 1)$,

$\vec{w} = (0; -2;\ 3)$. Tính x để ba vectơ đã cho đồng phẳng.

Giải:

Ta có ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{v}, \vec{w}\right].\vec{u} = 0$.

Theo giả thiết $\left[\vec{v}, \vec{w}\right] = (8;\ 12;\ 8)$ nên:

$\left[\vec{v}, \vec{w}\right].\vec{u} = 8x^2 + 12x + 8\left(x^2 - 5\right) = 16x^2 + 12x - 40$.

Vậy $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = 0 \Leftrightarrow 16x^2 + 12x - 40 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right..$$

Ví dụ 2: Cho $\vec{u} = (1;\ 1;\ 2)$, $\vec{v} = (-1;\ 3;\ 1)$. Tìm vectơ đơn vị đồng phẳng với $\vec{u}, \vec{v}$ và tạo với $\vec{u}$ góc 45°.

Giải:

Gọi vectơ phải tìm là $\vec{w} = (x;\ y;\ z)$. Theo giả thiết ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \cos\left(\vec{u}, \vec{w}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x + y + 2z}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra: $x + y + 2z = \sqrt{3}$. Mặt khác $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng nên:

$\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x = m - n \\ y = m + 3n \\ z = 2m + n \end{cases} \Rightarrow 5x + 3y - 4z = 0$. Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + 2z = \sqrt{3} \\ 5x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$. Giải hệ phương trình ta có hai vectơ thỏa điều kiện của bài toán là:

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{w_1} = \left(\dfrac{\left(1 + \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6};\ \dfrac{\left(5 - 7\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30};\ \dfrac{\left(10 + \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30}\right) \\ \overrightarrow{w_2} = \left(\dfrac{\left(1 - \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6};\ \dfrac{\left(5 + 7\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30};\ \dfrac{\left(10 - \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{30}\right) \end{array}\right..$$

3. Áp dụng tích có hướng để tính diện tích và thể tích

Ví dụ 1: Trong không gian (Oxyz), cho 4 điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(6;5;2)$, $D(7;\ 7;\ 5)$ không thẳng hàng.

Tìm diện tích của tứ giác ABCD.

Giải:

Ta có: A(1; 1; 1); B(2; 3; 4); D (7; 7; 5); C(6; 5 ; 2).

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1; 2; 3)$. Vậy ABCD là hình bình hành.

Áp dụng công thức tính diện tích hình bình hành ta có:

$S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right]\right|$; $\overrightarrow{AB} = (1;\ 2;\ 3)$; $\overrightarrow{AD} = (6;\ 6;\ 4)$.

Suy ra: $\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}\right) = (-10; 14; -6)$.

Vậy $S_{ABCD} = \sqrt{(-10)^2 + 14^2 + (-6)^2} = \sqrt{332} = 2\sqrt{83}$ (đvdt).

Ví dụ 2: Trong không gian (Oxyz), cho A(1; 2; 1), B(2; –1; 1), D(1; 0; 0), A'(0; 1; 0). Tìm thể tích khối hộp ABCDA'B'C'D'.

Giải:

Áp dụng công thức tính thể tích khối hộp ta có:

$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

$\overrightarrow{AB} = (1; -3;\ 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; -2; -1)$; $\overrightarrow{AA'} = (-1; -1; -1)$.

Vậy V = 4 (đvtt).

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác ABCA'B'C' có các cạnh bên là AA', BB', CC'. Tọa độ các điểm A(1; –2; –2), B(0; 0; – 3) ; C(–1; 0; 6), A'(2; 3; –1). Tính thể tích khối lăng trụ.

Giải:

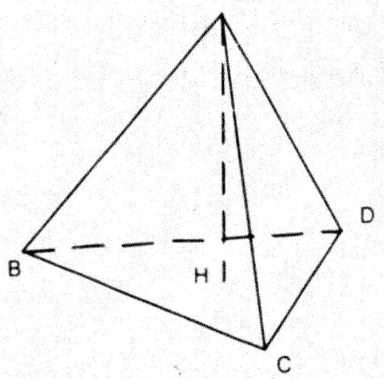
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 2; -1)$; $\overrightarrow{AC} = (-2;\ 2;\ 8)$; $\overrightarrow{AA'} = (1;\ 5;\ 1)$.

Suy ra: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (18;\ 10;\ 2)$ do đó $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'} = 70$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là:

$V_{ABCA'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}\right| = 35$ (đvtt).

Ví dụ 4: Trong không gian (Oxyz), cho tứ diện ABCD có A(2; 3; 1), B(4; 1; – 2), C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Tìm thể tích khối tứ diện ABCD.



Giải:

Ta có: $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

$\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$; $\overrightarrow{AC} = (4;\ 0;\ 6)$;

$\overrightarrow{AD} = (-7;-7;\ 7)$

$\Rightarrow V = \dfrac{154}{3}$ (đvtt).

Dạng 3: Phương trình mặt cầu

Ví dụ 1: Trong không gian (Oxyz), cho ΔABC với $A(-3;\ 2;\ 0)$, $B(0;\ 1;-2)$, $C(3;\ -2;\ -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng AB.

Giải:

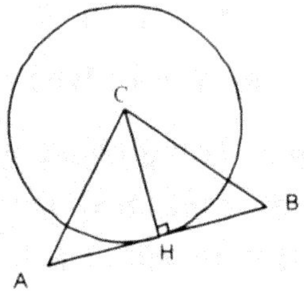
Để viết phương trình mặt cầu (S) ta cần tìm bán kính mặt cầu.

Giả sử (S) tiếp xúc với AB tại H, R = CH

$\overrightarrow{AB} = (3;-1;-2)$; $\overrightarrow{AC} = (6;-4;-1)$; $\overrightarrow{BC} = (3;-3;\ 1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}\right] = (-7;-9;-6)$; $AB = \sqrt{14}$.

Mặt khác diện tích Δ ABC là:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{49+81+36}.$$

$$= \frac{\sqrt{166}}{2} \Rightarrow CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \sqrt{\frac{83}{7}}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \frac{83}{7}.$$

Ví dụ 2: Trong không gian (Oxyz), cho tứ diện ABCD có $A(1;\ 0;\ 3)$, $B(0;\ -2;\ -1)$, $C(4;\ -1;\ -2)$, $D(-1;\ -1;\ -3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

Giải:

Để viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với (BCD) ta cần xác định bán kính mặt cầu.Kẻ $AH \perp (BCD)$, khi đó ta có bán kính mặt cầu là R = AH. Ta có:

$\overrightarrow{BC} = (4;\ 1;-1)$; $\overrightarrow{BD} = (-1;\ 1;-2)$; $\overrightarrow{BA} = (1;\ 2;\ 4)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}\right] = (-1;9;5)$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{\sqrt{107}}{2}$.

$\left[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BA} = 37 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BA}\right| = \frac{37}{6}$.

Vậy độ dài đường cao AH của tứ diện ABCD là

$$AH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3.\frac{37}{6}}{\frac{\sqrt{107}}{2}} = \frac{37}{\sqrt{107}}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{1369}{107}$.

Ví dụ 3: Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD với A(0;–1; 4), B(1; –5; 1), C(0; 7; 0), D (–3; 3; –5)

***Giải*:**

Cách 1: Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0\,(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$$

Mặt cầu qua A, B, C, D nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2b + 8c + d = 17 \\ 2a - 10b + 2c + d = -27 \\ 14b + d = -49 \\ -6a + 6b - 10c + d = -43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = -35. \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z - 35 = 0.$$

Cách 2:

Giả sử I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD ta có

IA = IB = IC = ID hay

$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$. Thế tọa độ các điểm A, B, C, D, I vào hệ phương trình.

Giải hệ phương trình ta suy ra được phương trình của mặt cầu.

Dạng 4: Áp dụng phương pháp tọa độ để giải các bài toán hình học

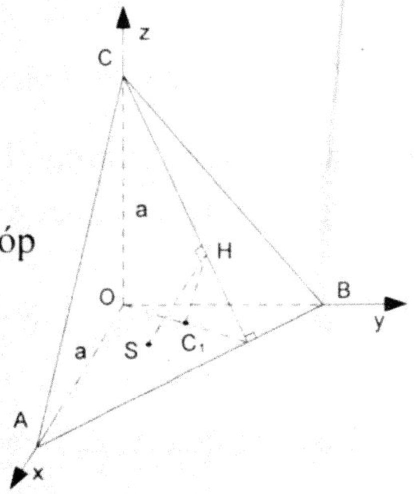
Ví dụ 1: Cho tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và đôi một vuông góc. $OH \perp (ABC)$ tại H. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của H lên các mặt (OBC), (OAC), (OAB).

a. Tính thể tích tứ diện $HA_1B_1C_1$.

b. Gọi S là điểm đối xứng của H qua O chứng minh tứ diện SABC đều.

c. Chứng minh OH không vuông góc với $(A_1B_1C_1)$.

Giải



Gọi hệ trục tọa độ Oxyz O (0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; 0; a).

a. Tính $V_{HA_1B_1C_1}$

Do OA = OB = OC nên O.ABC là hình chóp tam giác đều đỉnh O. $OH \perp (ABC)$ tại H

$\Rightarrow$ H là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow H\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$.

$HC_1 \perp (AOB) \Rightarrow C_1\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; 0\right)$.

Tương tự $A_1\left(0; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$, $B_1\left(\frac{a}{3}; 0; \frac{a}{3}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{HA_1} = \left(-\frac{a}{3}; 0; 0\right)$, $\overrightarrow{HB_1} = \left(0; -\frac{a}{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{HC_1} = \left(0; 0; -\frac{a}{3}\right)$.

$\Rightarrow V_{HA_1B_1C_1} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{HA_1}, \overrightarrow{HB_1}\right]\overrightarrow{HC_1}\right| = \frac{a^3}{162}$.

b. Chứng minh SABC là tứ diện đều

Ta có: $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$.

O là trung điểm của SH $\Rightarrow S\left(-\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}\right)$.

$\Rightarrow SA = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = a\sqrt{2}$.

Tương tự $SB = SC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow SA = SB = SC = AB = AC = BC = a\sqrt{2}$.

Vậy SABC là tứ diện đều.

c. Chứng minh OH không vuông góc với mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$

$\overrightarrow{A_1B_1} = \left(\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \left(\frac{a}{3}; 0; -\frac{a}{3}\right)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\right] = \left(\frac{a^2}{9}; \frac{a^2}{9}; 0\right)$ mà $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\right].\overrightarrow{OH} \neq 0$.

Vậy OH không vuông với mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$.

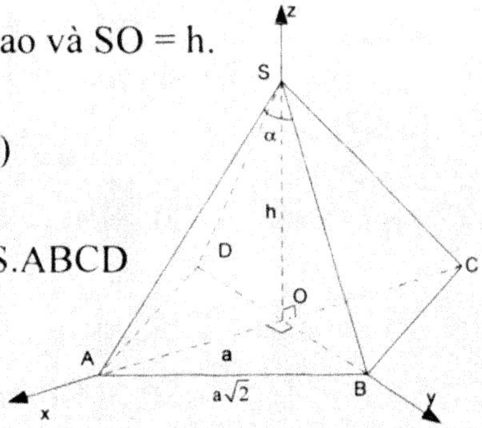
Ví dụ 2: Cho hình tứ giác đều cạnh đáy $a\sqrt{2}$, $\widehat{ASB} = \alpha$.

a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

c. Tìm α để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau.

Giải



Ta có: AC = BD = 2a. Gọi SO là đường cao và SO = h.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; a; 0), S(0; 0; h)

$\Rightarrow$ C(–a, 0; 0), D(0;–a; 0)

a. Tâm I và R của (S) ngoại tiếp hình chóp S.ABCD

Do S.ABCD là hình chóp tứ giác đều

nên $I \in OS \Rightarrow I(0; 0; z_o)$.

Phương trình mặt cầu (S):

$x^2 + y^2 + z^2 - 2z_oz + d = 0$.

$$A,\ S\in(S) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + d = 0 \\ h^2 - 2z_oh + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -a^2 \\ z_o = \dfrac{h^2 - a^2}{2h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(0;\ 0;\ \frac{h^2 - a^2}{2h}\right),\ R = \sqrt{\left(\frac{h^2 - a^2}{2h}\right)^2 + a^2} = \frac{h^2 + a^2}{2h}.$$

Mặt khác: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}}{SA.SB} = \dfrac{h^2}{a^2 + h^2}$.

$\Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{a^2\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$ (α nhọn do ΔSAB cân tại S).

Vậy: $R = \dfrac{a}{2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}$; $OI = \dfrac{a(2\cos\alpha - 1)}{2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}$.

b. Xác định tâm J và bán kính r của mặt cầu (S') nội tiếp hình chóp S.ABCD

Ta có: $J \in OS \Rightarrow J(0; 0; r)$, $OJ = r$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{r}{3}S_{tp} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.h\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2a^2h}{3}.$$

$$S_{xp} = 4S_{\Delta SAB} = 4.\frac{1}{2}SA.SB.\sin\alpha = 2\left(a^2 + h^2\right)\sin\alpha .$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + S_{ABCD} = 2\left(a^2 + h^2\right)\sin\alpha + 2a^2 .$$

$$\Rightarrow r = \frac{a^2h}{a^2 + \left(a^2 + h^2\right)\sin\alpha} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{1 + \sin\alpha - \cos\alpha} .$$

Vậy $OJ = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{1 + \sin\alpha - \cos\alpha} = r$.

c. Tìm α để $I \equiv J$

$$I \equiv J \Leftrightarrow OI = OJ \Leftrightarrow \frac{a(2\cos\alpha - 1)}{2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{1 + \sin\alpha - \cos\alpha} .$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\alpha - 1)(1 + \sin\alpha - \cos\alpha) = 2\cos\alpha(1 - \cos\alpha) .$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\cos\alpha\sin\alpha) + (\sin\alpha - \cos\alpha) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sin\alpha + 1 - \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha) = 0.$$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha$ (do $\sin\alpha + 1 - \cos\alpha > 0$).

$\Leftrightarrow \alpha = 45$ (do α nhọn). Vậy $I \equiv J \Leftrightarrow \alpha = 45°$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Trên cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M, N. Đặt CM = x, CN = y ($0 < x, y < a$)

a. Tìm hệ thức giữa x và y để [M, AS, N] = 45°

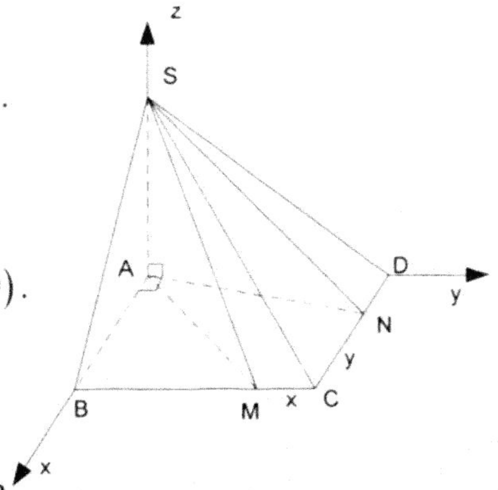
b. Tìm hệ thức giữa x và y để $(SAM) \perp (SMN)$.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; a; 0), S(0; 0; h)

$\Rightarrow$ M(a; a; 0), N(a – y; a; 0), $0 < x, y < a$.

a. Tìm x, y để [M, AS, N] = 45°.



Ta có: $\begin{cases} AS \perp AM \\ AS \perp AN \end{cases}$ (do AS ⊥ (ABCD)).

$\Rightarrow [M, AS, N] = \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}\right)$

$\overrightarrow{AM} = (a;\ a-x;\ 0)$, $\overrightarrow{AN} = (a-y;\ a;\ 0)$.

$\Rightarrow \cos 45^\circ = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{AN}\right|}$

$= \dfrac{a(a-y)+(a-x)a}{\sqrt{\left(2a^2-2ax+x^2\right)\left(2a^2-2ay+y^2\right)}}$.

$\Leftrightarrow 2a^2\left(4a^2+x^2y^2-4ax-4ay+2xy\right)$.

$= \left(2a^2-2ax+x^2\right)\left(2a^2-2ay+y^2\right)$.

Vậy hệ thức là $4a^4-4a^3(x+y)+2axy(x+y)-x^2y^2=0$.

b. Tìm x, y để (SAM) ⊥ (SMN)

Ta có: $\begin{cases} (SAM) \perp (AMN) \\ (SAM) \perp (SMN) \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAM)$.

⇒ Để (SAM) ⊥ (SMN) thì AM ⊥ MN.

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + ay = 0$.

Vậy hệ thức là $x^2 - ax + ay = 0$.

Ví dụ 4: Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có cạnh bằng 2. Gọi M, N là trung điểm của AB và DD'.

a. Chứng minh MN // (BDC').

b. Gọi P là trung điểm C'D'. Tính $V_{C.MNP}$ và góc giữa MN và BD.

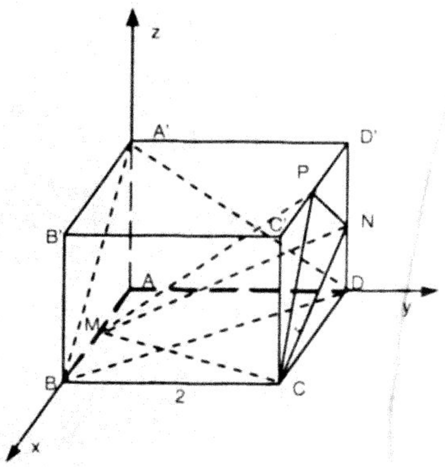
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho:

A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(2; 2; 0), D(0; 2; 0)A'(0; 0; 2), B'(2; 0; 2), C'(2; 2; 2), D'(0; 2; 2) ⇒ M(1; 0; 0), N(0; 2; 1), P(1; 2; 2).

a. Chứng minh MN // (BDC')

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-1;\ 2;\ 1) \\ \overrightarrow{BD} = (-2;\ 2;\ 0) \\ \overrightarrow{BC'} = (0;\ 2;\ 2) \end{cases}$



$\vec{n} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}\right] = (4;\ 4;\ -4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0 \Rightarrow MN \,//\, (BDC')$ do

M không thuộc mặt phẳng (BDC') và $\vec{n} \perp (BDC')$.

b. Tính $V_{C.MNP}$ Và $\varphi = \left(\widehat{MN, BD}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MP} = (0;\ 2;\ 2)$; $\overrightarrow{MC} = (1;\ 2;\ 0)$

$V_{C.MNP} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]\overrightarrow{MC}\right| = 1$; $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}\right|}{MN.BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\varphi = 30°$.

Bài tập vận dụng

1. Trong không gian Oxyz cho vectơ $\vec{a} = (1; -2\ ;\ 4)$, $\vec{b} = (2\ ;\ 1\ ; -3\ )$, $\vec{c} = (1\ ;\ 0\ ; -1\ )$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ là:

A. $\vec{u} = (-4\ ;\ 1\ ;\ 3)$ B. $\vec{u} = (4\ ; -1\ ;\ 3)$

C. $\vec{u} = (-4\ ; -1\ ;\ 3)$ D. $\vec{u} = (4\ ;\ 1\ ;\ 3)$.

2. Trong không gian Oxyz, cho ΔABC có A(2; –1; 3), B(1; 0; -2), C(3; –2; 0). G là trọng tâm tam giác ABC. Khoảng cách OG là:

A. $OG = \dfrac{\sqrt{46}}{2}$ B. $OG = \dfrac{\sqrt{46}}{4}$ C. $OG = \dfrac{\sqrt{46}}{5}$ D. $OG = \dfrac{\sqrt{46}}{3}$.

3. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (2; -5;\ 3)$, $\vec{b} = (0;\ 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7;\ 2)$. Tọa độ $\vec{x}$ thỏa $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$ là:

A. $\vec{x} = (-1\ ;\ 14; -2)$ B. $\vec{x} = (1; 14; -2)$

C. $\vec{x} = (-1;\ 14;\ 2)$ D. $\vec{x} = (1\ ;\ 14;\ 2)$.

4. Trong không gian Oxyz, cho 3 vectơ $\vec{a} = (4\ ;\ 3;\ 4)$, $\vec{b} = (2\ ;-1\ ;\ 2)$, $\vec{c} = (1\ ;\ 2;\ 1)$. $A = \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c}$ có giá trị là:

A. 1 B. 2 C. 8 D. 0.

5. Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD có A(2; 3; 1), B(4; 1; –2), C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Thể tích khối tứ diện ABCD là:

A. $V = \dfrac{154}{5}$ (đvtt) B. $V = \dfrac{154}{3}$ (đvtt)

C. $V = \dfrac{154}{6}$ (đvtt) D. $V = \dfrac{154}{8}$ (đvtt).

6. Trong không gian (Oxyz), cho 3 vectơ $\vec{a} = (1;\ 0;\ 0)$, $\vec{b} = (0;\ 1;\ 0)$, $\vec{c} = (0;\ 0;\ a)$. Nếu cả 3 vectơ đồng phẳng thì a có giá trị là:

A. 1 B. –1 C. 2 D. –2.

7. Trong không gian (Oxyz), cho $\vec{a} = (5;\ 4;-1)$, $\vec{b} = (2;-5;\ 3)$. Tọa độ $\vec{x}$ thỏa $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ là:

A. $\vec{x} = (1;\ 2;-1)$ B. $\vec{x} = (-1;\ 2;-1)$

C. $\vec{x} = (-1;\ 2;\ 1)$ D. $\vec{x} = (1;\ 2;\ 1)$.

8. Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1). Tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành là:

A. D (–1; 1; 2) B. D (1; –1; 2)

C. D (1; 1; 2) D . D (1; 1; –2).

9. Trong không gian Oxyz cho A(3; 0; 4), B(1; 2; 3), C(9; 6; 4) là ba đỉnh của hình bình hành ABCD .Tọa độ đỉnh D là:

A. D (11; 4; 5) B. D (11; 4; –5)

C. D (11; –4; 5) D. D (11; –4; –5).

10. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (5, 4, 1)$; $\vec{b} = (2, -5, 3)$. Tọa độ $\vec{x}$ thỏa mãn: $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ là:

A. $\vec{x} = \left(-\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{9}{2};\ 2\right)$ B. $\vec{x} = \left(\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{9}{2};\ 2\right)$

C. $\vec{x} = \left(-\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{9}{2};\ 2\right)$ D. Đáp số khác.

11. Trong không gian Oxyz, trên trục y'Oy, tính tọa độ điểm cách đều 2 điểm A(3; 1; 0); B(–2; 4; 1) .

12. Trong hệ trục Oxyz cho 4 điểm A(1; 6; 2), B(4; 0; 6), C(5; 0; 4), D(5; 1; 3), D(5; 1; 3). Tính $\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right].\overrightarrow{DB}$.

13. Trong hệ trục Oxyz cho 4 điểm A(1; 6; 2), B(4; 0; 6), C(5; 0; 4), D(5; 1; 3), D(5; 1; 3).Tính cosin của góc tạo bởi $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{CB}$

14. Trong không gian, cho hình hộp ABCDA'B'C'D' biết A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; –1; 1), C'(4; 5; –5). Tính toạ độ đỉnh A'.

15. Cho ba vectơ: $\vec{a} = (1; -1; 1)$; $\vec{b} = (4; 0; -1)$; $\vec{c} = (3; 2; -1)$. Tích $(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$ là $\vec{x}$. Tính tọa độ $\vec{x}$.

16. Cho A(1; 2; 1), B(2; –1; 1), D(1 ; 0 ; 0), A'(0 ; 1 ; 0). Tính thể tích khối hộp ABCDA'B'C'D' là :

17. Cho véctơ $\vec{u} = (3; -5; 6)$, biết tọa độ điểm đầu của véctơ $\vec{u}$ là (0; 6; 2). Tính tọa độ điểm cuối của $\vec{u}$.

18. Cho vectơ $\vec{v} = (1; 1; 1)$, biết tọa độ điểm cuối của vectơ $\vec{v}$ là $(2; 1; 4)$. Tính tọa độ điểm đầu của $\vec{v}$.

19. Cho hai điểm A(–1; 6; 6), B(3; –6; –2). Tính tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho MA + MB nhỏ nhất .

20. Cho $\vec{u} = (0; 3; 2)$, $\vec{v} = (-4; 1; -3)$, $\vec{w} = (1; -2; 2)$. Tính giá trị của biểu thức $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w}$ Giả sử 4 điểm A(1; 1; 1), B(2; 3; 4), C(6; 5; 2), D(7; 7; 5) là 4 đỉnh của một hình bình hành. Tính diện tích của hình bình hành đó .

21. Cho hai điểm A(2; –1; 7), B(4; 5; –2). Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oyz tại điểm M. Tính tọa độ điểm M .

22. Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$; $\vec{v} = (m; 3; -1)$; $\vec{w} = (1; 2; 1)$.Tính giá trị m để ba vectơ đồng phẳng .

23. Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$; $\vec{v} = (m; 3; -1)$; $\vec{w} = (1; 2; 1)$. Hãy biểu thị vectơ $\vec{a} = (-4; 12; 3)$ theo ba vectơ trên .

24. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(1; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 0; 2), D(1; 1; 1).

a. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện ABCD.

b. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC, trọng tâm tứ diện ABCD.

c. Tính diện tích các mặt của tứ diện.

d. Tính độ dài các đường cao của khối tứ diện.

e. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

f. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

25. Trong không gian Oxyz cho $A(1;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 0;\ 1)$; $C(2;\ 1;\ 1)$

a. Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b. Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

c. Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành.

d. Tính độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

e. Tính các góc của tam giác ABC.

f. Xác định tọa độ trực tâm tam giác ABC .

g. Xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

26. Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC có A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5).

a. Tính độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

b. Tính độ dài đường phân giác trong kẻ từ B của tam giác ABC.

27. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(2; –1; 6), B(–3; –1; –4), C(5; –1; 0), D(1; 2; 1).

a. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

b. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

28. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a. Chứng minh $A'C \perp (AB'D')$.

b. Gọi M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BB'. Chứng minh $AC' \perp MN$.

c. Tính cosin của góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AC'}$.

d. Tính thể tích khối tứ diện A'CMN.

30. Cho tứ diện SABC có $SA = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M \in SA$, $N \in BC$ sao cho: $AM = CN = t$ $(0 < t < 2a)$.

a. Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất.

b. Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

31. a. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$. Tìm m để phương trình trên là phương trình mặt cầu và tìm m để bán kính mặt cầu là bé nhất.

b. Cho phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha - 4z - \left(4 + \sin^2\alpha\right) = 0.$$

Tìm α để phương trình trên là phương trình mặt cầu và tìm α để bán kính mặt cầu là bé nhất.

32. Cho hình chóp SABC, đáy ABC là tam giác vuông ($\hat{C} = 90$). SA vuông góc với mặt phẳng ABC, AC = a, BC = b, SA = h. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và SB.

a. Tính độ dài MN .

b. Tìm hệ thức giữa a, b, h để MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AC và SB.

33. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a. Tính góc tạo bởi các đường thẳng AC'và A'B.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh A'B', BC và DD'. Hãy chứng minh AC'vuông góc với mặt phẳng (MNP).

34. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. OA = a, OB = b, OC = c.

a. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp (S) của tứ diện OABC. Tính bán kính r của (S).

b. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng góc nhị diện cạnh OM của OMNP là vuông $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

35. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 4, AA' = 6

Gọi I, J là trung điểm AB, C'D'. Gọi M, N thỏa:

$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'}\ (0 \le m \le 1)$.

a. Chứng minh I, M, J, N đồng phẳng.

b. Xác định tâm K và bán kính R của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp ABDA'.

c. Tính bán kính r của đường tròn giao của (S) và (BDA').

HƯỚNG DẪN

1. Câu B.

2. Câu D.

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \Rightarrow G = \left(2; -1; \dfrac{1}{3}\right)$

Vậy $OG = \left|\overrightarrow{OG}\right| = \dfrac{\sqrt{46}}{3}$.

3. Câu A.

4. Câu D.

5. Câu B.

Ta có: $V = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\ \overrightarrow{AD}\right|$

$\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3);\ \overrightarrow{AC} = (4;\ 0;\ 6);\ \overrightarrow{AD} = (-7; -7;\ 7) \Rightarrow V = \dfrac{154}{3}$ (đvtt).

6. Câu C.

7. Câu B.

8. Câu C.

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow D = (1;\ 1;\ 2)$.

9. Câu A.

10. Câu A.

11. $\overrightarrow{DA} = (-4;\ 5; -1)$; $\overrightarrow{DB} = (-1; -1;\ 3)$

$\overrightarrow{DC} = (0; -1;\ 1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right].\overrightarrow{DB} = 4$.

13. $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{210}}$.

14. Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow A' = (3\ ;\ 5\ ;\ -6)$.

15. $\vec{x} = (9; 6; -3)$.

16. $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$;

$\overrightarrow{AB} = (1; -3;\ 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; -2; -1)$; $\overrightarrow{AA'} = (-1; -1; -1) \Rightarrow V = 4$ (đvtt).

17.

Gọi tọa độ điểm cuối là (x; y; z). Ta có: (x – 0; y – 6; z – 2) = (3; –5; 6)

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 0 = 3 \\ y - 6 = -5 \\ z - 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 8 \end{cases}$$

18. Câu B.

19. Vì $z_A = 6$, $z_B = -2 \Rightarrow z_A.z_B < 0 \Rightarrow$ A, B ở hai phía của mặt phẳng (Oxy). Vậy MA + MB nhỏ nhất khi A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}\right] = \vec{0}$. Gọi M(x; y; z) thuộc mặt phẳng (Oxy) $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x + 1;\ y - 6; -6)$; $\overrightarrow{AB} = (4; -12; -8)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix} y-6 & -6 \\ -12 & -8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -6 & x+1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x+1 & y-6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}\right)$

$= (-8y - 24; 8x - 16; -12x - 4y + 12) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8y - 24 = 0 \\ -8x - 16 = 0 \\ -12x - 4y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy MA + MB ngắn nhất khi M = (2; –3, 0).

20. $\left[\vec{u}.\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & -3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 0\\-3 & -4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 3\\-4 & 1\end{vmatrix}\right) = (-11; -8; 12)$

$\Rightarrow \left[\vec{u}.\vec{v}\right].\vec{w} = (-11.1 + (-8).(-2) + 12.2 = 29$.

21. Ta gọi A(1; 1; 1); B(2; 3; 4); D(7; 7; 5); C(6; 5; 2).

Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (1; 2; 3)$. Vậy ABCD là hình bình hành.

$S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right]\right|$; $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$; $\overrightarrow{AD} = (6; 6; 4)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix}2 & 3\\6 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}3 & 1\\4 & 6\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2\\6 & 6\end{vmatrix}\right) = (-10; 14; -6)$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{(-10)^2 + 14^2 + (-6)^2} = \sqrt{332} = 2\sqrt{83}$.

22. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oyz tại M $\Rightarrow$ M(0; y; z)

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; -1 - y; 7 - z)$, $\overrightarrow{MB} = (4; 5 - y; -2 - z)$.

Từ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ta có hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2 = k.4\\ -1 - y = k(5 - y)\\ 7 - z = k(-2z)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k = \dfrac{1}{2}\\ y = -7\\ z = 16\end{cases}.$$

23. $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\3 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & m\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -1\\m & 3\end{vmatrix}\right) = (-2;\ m + 2;\ m + 6)$.

$\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = -2 + 2m + 4 + m + 6 = 3m + 8$.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow 3m + 8 = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{8}{3}$.

24.

$$\begin{cases}3m + 2n + 3k = -4\\ 7m + 3n - 2k = -12\\ n + 4k = 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m = -5\\ n = 7\\ k = -1\end{cases}. \text{ Vậy } \vec{a} = -5\vec{u} + 7\vec{v} - \vec{w}.$$

25. a. Ta có: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 1 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Do đó bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng và

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}$$

b. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow$ G $\left(\frac{1}{6}; 1; 1\right)$.

Gọi G′ là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Rightarrow$ G′ $\left(\frac{3}{4}; 1; 1\right)$.

c. $$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

$$S_{ACD}\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{ADB}\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{BCD}\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d. Từ công thức tính thể tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3}BH$

(B là diện tích đáy, h là chiều cao tương ứng) ta suy ra: $h = \frac{3V}{B}$

Nếu gọi h_A, h_B, h_C, h_D là chiều cao hạ từ đỉnh A, B, C, D thì ta có:

$$h_A = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad h_B = \frac{3V}{S_{ACD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$h_C = \frac{3V}{S_{ABD}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad h_D = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

e. Vì $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)$; $\overrightarrow{CD} = (0; 1; -1)$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

$\Rightarrow$ góc giữa AB và CD bằng 90 °.

f. Gọi I (x; y; z) là tâm cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 3 \\ -2y + 4z = 3 \\ 2z = 1 \end{cases}$$ Giải hệ phương trình ta được

$x = -\frac{3}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$. Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là

$I(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ và $R = ID = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}$

Do đó phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{35}{4}.$$

26. a. Ta có: $\overrightarrow{CA} = (-1; -1; -1)$, $\overrightarrow{CB} = (-2; -1; 0)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-1; -2; -1) \neq 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}$ không cùng phương hay A, B, C không thẳng hàng, tức là: A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b. Chu vi tam giác ABC bằng $AB + AC + BC = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$$S_{ABC}\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

c. Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Gọi D(x; y; z) ta có:

$\overrightarrow{AB} = (-1; 0; -1)$; $\overrightarrow{DC} = (2 - x\ ;\ 1 - y\ ;\ 1 - z\ )$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - x = -1 \\ z - y = 0 \\ 1 - z = 1 \end{cases} \Rightarrow D(3;1;0)$$

d. Gọi h_A là đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A, ta có:

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

e. $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 0\ \Rightarrow\ \widehat{A} = 90°$ (tam giác vuông đỉnh A)

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

f. Δ ABC vuông tại A nên trực tâm H trùng với A.

Vậy H(1; 0; 0). Ta có thể làm cách khác như sau:

Gọi H(x; y; z) là trực tâm của tam giác ABC, ta có hệ

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y; z)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 1; 0)$, $\overrightarrow{BH} = (x; y; z - 1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 1)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1; 2; 1)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AH} = 1 - x + 2y - z$.

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ 1 - 2 + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow H(1; 0; 0). \\ z = 0 \end{cases}$$

h. ΔABC vuông tại A nên tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm

của cạnh huyền BC. Do đó $I(1; \frac{1}{2}; 1)$. Ta có thể làm cách khác như sau:

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$ (do 3 vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}$ đồng phẳng).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \\ 1 - x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(1; \frac{1}{2}; 1)$.

27. a. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5; 5; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2)$

Suy ra: $\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right] = (-38; -26; -10)$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{38^2 + 26^2 + 10^2} = \sqrt{554}$

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{554}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{277}}{\sqrt{13}}.$$

b. Gọi D là chân đường phân giác kẻ từ B, giả sử D(x; y; z).

Ta có: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2}$

Vì D nằm giữa A, C (phân giác trong) nên $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) = x+4 \\ 2(2-y) = y-7 \\ 2(-1-z) = z-5 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = -\frac{2}{3};\ y = \frac{11}{3};\ z = 1$.

Vậy $D(-\frac{2}{3};\ \frac{11}{3};\ 1) \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{74}}{3}$.

28. a. Ta có: $\overrightarrow{BA} = (5;\ 0;\ 10)$, $\overrightarrow{CA} = (-3;\ 0;\ 6)$, $\overrightarrow{CB} = (-6;\ 0;-4)$

Do $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 24 - 24 = 0$. Suy ra ΔABC là tam giác vuông tại C.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 30.$$

Ta lại có: $P = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = \frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$.

Mặt khác: $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{P} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

b. Ta có: $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 4 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}\right) = (0;\ 60;\ 0)$

Gọi $\overrightarrow{BD} = (4; 3; 5)$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{6}|0.4 + 60.3 + 0.5| = 30.$$

c. Gọi I(x; y; z) là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, ta có:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$$

Thế tọa độ các điểm A, B, C, D, I ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -10x - 20z + 15 = 0 \\ 6x - 12z + 15 = 0 \\ -2x + 6y - 10z + 35 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{13}{3}$, $z = 1$. Vậy tâm mặt cầu có tọa độ $I(-\frac{3}{2}; -\frac{13}{2}; 1)$ và bán kính

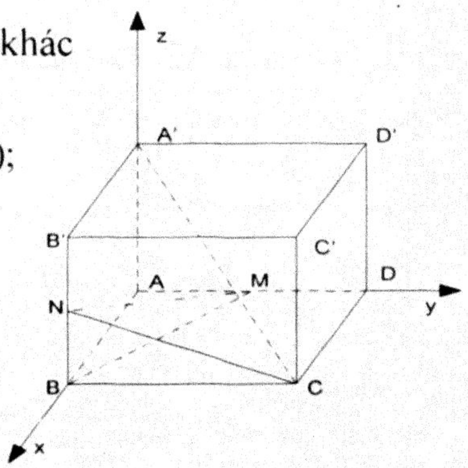
$$R = IC = \sqrt{\left(5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{13}{3}\right)^2 + (0-1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{100}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1525}{36}} = \frac{\sqrt{1525}}{6}.$$

Do đó phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{13}{3}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{1525}{36}.$$

Ngoài ra ta có thể giải bằng phương pháp khác



29. Thiết lập hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có

A(0; 0; 0); A′(0; 0; a); C′(a; a; a); B(a; 0; 0);

D′(0; a; a); B′(a; 0; a); C(a; a; 0)

a. Ta có:

$\overrightarrow{A'C} = (a; a; -a)$

$\overrightarrow{AB'} = (a; 0; a) \Rightarrow \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = (0; a; a) \Rightarrow \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{AD'}$

hay $\overrightarrow{A'C} \perp mp(AB'D')$

b. Ta lại có:

$N(a; 0; \frac{a}{2})$, $M(0; \frac{a}{2}; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (a; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = (a^2; -\frac{a^2}{2}; \frac{a^2}{2}) = 0 \Rightarrow MN \perp A'C$

c. $\overrightarrow{AC'} = (a; a; a)$

Vậy: $\cos(\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}) = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}}{|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{AC'}|} = \dfrac{a^2 - \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}}{\sqrt{\dfrac{3a^2}{2}}.\sqrt{3a^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

d. $V_{A'CMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'N}.\overrightarrow{A'M}\right]\overrightarrow{A'C}\right|$

$\overrightarrow{A'N} = (a; 0; -\dfrac{a}{2})$; $\overrightarrow{A'M} = (0; \dfrac{a}{2}; -a)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'N}.\overrightarrow{A'M}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{vmatrix}\right) = \left(\dfrac{a^2}{4}; a^2; \dfrac{a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow V_{A'CMN} = \dfrac{1}{6}\left|\dfrac{a^3}{4} + a^3 - \dfrac{a^3}{2}\right| = \dfrac{1}{6}\left|\dfrac{3a^3}{4}\right| = \dfrac{a^3}{8}$ (đvtt).

30. a. Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A$, trục Ox chứa AC, trục Oy chứa AB và trục $Oz \perp (ABC)$ .Khi đó, cạnh SC song song với trục Oz và ta có: $A(0; 0; 0)$, $B(0; a\sqrt{2}; 0)$, $C(a\sqrt{2}; 0; 0)$,

$S(a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2})$, $N\left(a\sqrt{2} - \dfrac{t\sqrt{2}}{2}; \dfrac{t\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $M\left(\dfrac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \dfrac{t\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}(a-1); \dfrac{t\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{t\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \sqrt{2(a^2 - 2at + t^2) + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^2}{2}}$

$= \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{3\left(t - \dfrac{2a}{3}\right)^2 + \dfrac{2a^2}{3}} \geq \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy MN ngắn nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t = \dfrac{2a}{3}$.

b. Khi MN ngắn nhất thì

$M(\dfrac{a\sqrt{2}}{3}; 0; \dfrac{a\sqrt{2}}{3})$, $N(\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}; \dfrac{a\sqrt{2}}{3}; 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (\dfrac{a\sqrt{2}}{3}; \dfrac{a\sqrt{2}}{3}; -\dfrac{a\sqrt{2}}{3})$

$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ MN là đường vuông góc chung của SA và BC.

31. a. Ta có: $a = 2m$, $b = -2$; $c = -m$, $d = m^2 + 4m$.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi

$(2m)^2 + (-2)^2 + (-m)^2 - m^2 - 4m > 0$

$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 + 3 > 0, \forall m.$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi m và

$R = \sqrt{(2m-1)^2 + 3} \ge \sqrt{3} \Rightarrow R_{min} = \sqrt{3}$ khi $m = \dfrac{1}{2}$.

b. Ta có: $a = -\cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = 2$, $d = -(4 + \sin^2\alpha)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 4 + 4 + \sin^2\alpha$

$= 9 + \sin^2\alpha > 0\ (\forall\alpha)$.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi α

Khi đó $R = \sqrt{9 + \sin 2\alpha} \ge 3 \Rightarrow R_{min} = 3$ khi $\alpha = k\pi\ (k \in Z)$.

31. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

A(0; 0; 0), S(0; 0; h), B(a; b; 0), C(a; 0; 0).

a. Từ đó ta có: $M\left(\dfrac{a}{2}; 0; 0\right)$; $N\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}; \dfrac{h}{2}\right)$; $\overrightarrow{MN} = \left(0; \dfrac{b}{2}; \dfrac{h}{2}\right)$.

Vậy $MN = \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{h^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + h^2}$.

b. Vì $\overrightarrow{MN} = \left(0; \dfrac{b}{2}; \dfrac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = (a; 0; 0)$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Vậy $MN \perp AC$. Vì $\overrightarrow{SB} = (a; b; -h)$ nên để $MN \perp SB$ ta phải có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0$

hay $\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{h^2}{2} = 0$. Vậy b = h.

33. a. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

A(0; 0; 0), A'(0; 0; h), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0).

Suy ra C'(1; 1; 1), B'(1; 0; 1), D'(0; 1; 1), C(1; 1; 0).

Do đó $\overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1)$ $\overrightarrow{A'B} = (1; 0; -1)$ nên

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'B} = 0$. Vậy $AC' \perp A'B$.

b. Từ giả thiết ta có: $M\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right)$, $N\left(1;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$, $P\left(0;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$.

Muốn chứng minh AC' ⊥ (MNP) ta cần chứng minh AC' ⊥ MP và

$AC' \perp MP \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = 0 \\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MP} = 0 \end{cases}$; $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};-1\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = 0$

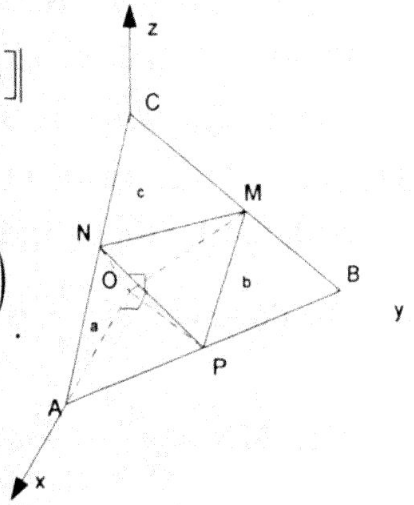
$\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MP} = 0 \Rightarrow AC' \perp (MNP)$.

34. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)

a. Tính r

Ta có: $V_{I.OAB} + V_{I.OBC} + V_{I.OCA} + V_{I.ABC} = V_{OABC}$

$\Rightarrow \frac{r}{3}(S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} + S_{\Delta ABC}) = \frac{abc}{6}$ (1).



$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|[(-a;\ b;\ 0),(-a;\ 0;\ c)]\right\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

(1) $\Rightarrow \frac{r}{6}\left(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 +\ b^2c^2 + c^2a^2}\right)$

$= \frac{abc}{6}$

Vậy $r = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

b. Chứng minh [N, OM, P] = 90° $\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Ta có: $M\left(0;\ \frac{b}{2};\ \frac{c}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2};\ 0;\ \frac{c}{2}\right)$, $P\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2};\ 0\right)$.

Gọi $\vec{n} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right]; \vec{n}' = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right]$.

Ta có: $\vec{n} \perp (OMN)$; $\vec{n'} \perp (OMP)$

Do đó: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = \left(\frac{bc}{4};\ \frac{ac}{4};\ \frac{-ab}{4}\right)$

$$\vec{n}' = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right] = \left(\frac{-bc}{4}; \frac{ac}{4}; \frac{-ab}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left[N, OM, P\right] = 90 \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}' = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b^2c^2}{16} + \frac{a^2c^2}{16} + \frac{a^2b^2}{16} = 0$$

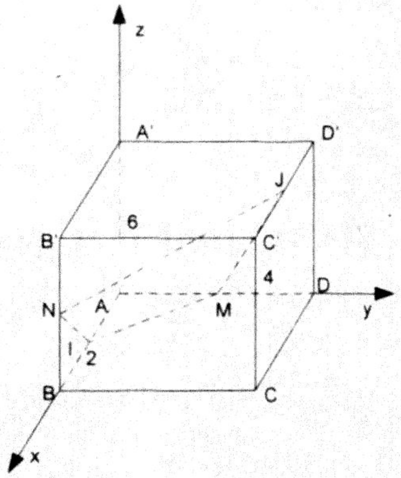
$$\Leftrightarrow a^2\left(c^2 + b^2\right) = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

35. Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho:

A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 4; 0), A'(0; 0; 6), C(2; 4; 0), B'(2; 0; 6), C'(2; 4; 6), D'(0; 4; 6) $\Rightarrow$ I(1; 0; 0), J(1; 4; 6)

$$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD} = m(0;4;0) \Rightarrow M(0;\ 4m;\ 0)$$

$$\overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'} = m(0;0;6) \Rightarrow N(2;0;6m).$$



a. Chứng minh I, M, J, N đồng phẳng

$$\text{Ta có:} \begin{cases} \overrightarrow{IM} = (-1;\ 4m;\ 0) \\ \overrightarrow{IN} = (1;\ 0;\ 6m) \\ \overrightarrow{IJ} = (0;\ 4;\ 6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}\right] = (-24m;\ 1-6;\ 4)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}\right]\overrightarrow{IM} = 24m - 24m = 0 \quad \forall m \in [0,\ 1]$$

Vậy I, M, J, N đồng phẳng.

b. Xác định bán kính R và tâm K:

Phương trình mặt cầu (S) là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0\left(\text{do } A \in (S)\right)$$

$$\text{B, D, A'} \in (S)\text{, suy ra:} \begin{cases} 4 - 4a = 0 \\ 16 - 8b = 0 \\ 36 - 12c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow K(1;\ 2;\ 3)$$

và $R = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$. Vậy K là trung điểm AC' và R = $\sqrt{14}$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Kiến thức cần nhớ

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng :

* Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu nó nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α), viết tắt là $\vec{n} \perp (\alpha)$.

* Nếu hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ không cùng phương và các đường thẳng chứa chúng song song với (hoặc nằm trên) một mặt phẳng (α) thì vectơ

$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

Mặt phẳng có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$
với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (1)

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng trên đều là phương trình của một mặt phẳng. Nếu mặt phẳng (α) có phương trình (1) thì vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

+ Mặt phẳng qua điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$ sẽ có phương trình tổng quát là:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0.$$

+ Các trường hợp đặc biệt:

Xét mặt phẳng (α) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Khi đó:

* $D = 0$ $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ.
* $C = 0, D \neq 0$ $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (α) song song với trục Oz.
* $C = D = 0$ $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (α) chứa trục Oz.
* $B = C = 0, D \neq 0$ $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (α) song song với (Oyz)
* $B = C = D = 0$ $\Leftrightarrow$ mặt phẳng (α) chính là mặt phẳng (Oyz)

(Các trường hợp khác suy ra tương tự).

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt phẳng

(α'): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$(\alpha) // (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

$(\alpha) \equiv (\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

(α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ hoặc $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ hoặc $\frac{C}{C'} \neq \frac{A}{A'}$

$(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$

Chú ý: Trong cách viết trên ta quy ước một "phân số" nào đó có "mẫu số" bằng 0 thì "tử số" cũng bằng 0.

4. Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng:

Mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm (a; 0; 0), cắt trục Oy tại điểm (0; b; 0) cắt trục Oz tại điểm (0; 0; c) có phương trình:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, abc \neq 0$ .Phương trình này gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α).

5. Góc giữa hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và

(α'): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α'), ta có:

$$\text{Cos } \varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

6. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và một điểm $M_o = (x_o; y_o; z_o)$, khi đó $d(Mo, (\alpha)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Phương trình của mặt phẳng

a. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm M, N, P không thẳng hàng

Cách 1: Sử dụng phương trình tổng quát
Phương trình mặt phẳng có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$. Thế tọa độ 3 điểm đã cho vào phương trình , giải hệ phương trình ta có giá trị của các hệ số A, B, C, D. Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm.

Ví dụ 1: Cho 3 điểm M(3; –1; 2); N(4; –2; –1); P(2; 0; 2). Viết phương trình mặt phẳng (MNP).

Giải:

Phương trình mặt phẳng có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$.

Thế tọa độ các điểm đã cho vào phương trình tổng quát của mặt phẳng ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3A - B + 2C + D = 0 \\ 4A - 2B - C + D = 0 \\ 2A + 2C + D = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có: $A = 1, B = 1, C = 0, D = -2$

Vậy phương trình mặt phẳng (MNP) là: $x + y - 2 = 0$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ làm cặp vectơ chỉ phương. Khi đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]$

Ví dụ 2: Cho 3 điểm M(3; –1; 2), N(4; –2; –1), P(2; 0; 2). Viết phương trình mặt phẳng (MNP).

Giải:

$\overrightarrow{MN} = (1; -1; -3)$; $\overrightarrow{MP} = (-1;\ 1;\ 0)$

Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) là:

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (3;\ 3;\ 0)$ hay phương trình mặt phẳng (MNP) là:

$3(x - 3) + 3(y + 1) + 0(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0.$

b. **Viết phương trình mặt phẳng biết một điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$.**

Khi đó ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là:

$\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (A;\ B;\ C)$. Nên phương trình mặt phẳng có dạng:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Ví dụ: Cho 4 điểm A(5; 1; 3); B(1; 6; 2); C(5; 0; 4); D(4; 0; 6). Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với đường thẳng CD.

Giải:

Ta có mặt phẳng (α) chứa AB, (α) // CD nên mặt phẳng (α) qua A(5; 1; 3) và nhận $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ làm vectơ chỉ phương do đó mặt phẳng (α) nhận vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4;\ 5; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1;\ 0;\ 2) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (10;\ 9;\ 5)$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là:

$10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0$ hay $10x + 9y + 5z - 74 = 0$

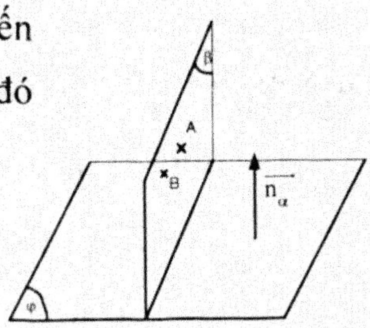
c. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai điểm và vuông góc mới một mặt phẳng cho trước.

Viết phương trình mặt phẳng chứa 2 điểm A, B và vuông góc với một mặt phẳng (α) là viết phương trình mặt phẳng qua một điểm A và có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Ví dụ 1: Trong không gian, viết phương trình mặt phẳng qua A(1; 2; 3), B(−1; 5; 2) và vuông góc với mặt phẳng 2x + z + 5 = 0.

Giải:

Mặt phẳng cần tìm nhận $\overrightarrow{AB} = (-2;\ 3; -1)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 0; 1)$ của mặt phẳng 2x + z + 5 = 0 làm cặp vectơ chỉ phương nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}\right]$. Khi đó ta chọn $\overrightarrow{n_1} = (1;\ 0; -2)$ làm véctơ pháp tuyến.



Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$x - 2z + 5 = 0$.

Ví dụ 2: Cho 2 điểm A(–2, 3, –1), B(1, –2, –3) và mặt phẳng (α) có phương trình: $3x + 2y - z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa đường thẳng AB và vuông góc với mặt phẳng (α).

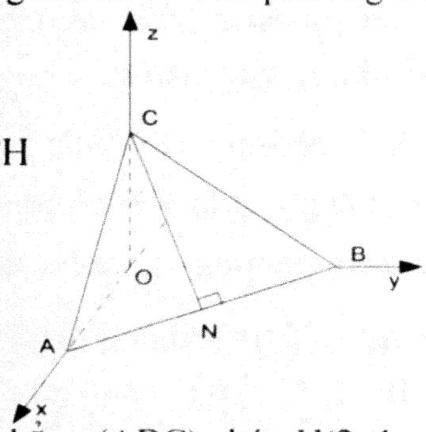
Giải:

Mặt phẳng (β) $\perp$ (α) ,do mặt phẳng (β) chứa AB nên mặt phẳng (β) có cặp vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AB} = (3; -5; -2)$ và $\overrightarrow{n_\alpha} = (3;\ 2; -1)$ trong đó $\overrightarrow{n_\alpha}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Suy ra vectơ pháp tuyến của (β) là: $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = (9; -3;\ 21)$.

hay $\overrightarrow{n'_\beta} = (3; -1; 7)$ là vectơ pháp tuyến của (β). Do đó mặt phẳng (β) có phương trình là:

$$3(x+2) - (y-3) + 7(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 7z + 16 = 0.$$

Ví dụ 3: Mặt phẳng (α) cắt các trục của hệ tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Biết H (2; 1; –4) là trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình mặt phẳng (α)



Giải:

Do H là trực tâm của tam giác ABC nên $AB \perp CH$

$$\left.\begin{array}{l} OC \perp (Oxy) \\ AB \subset (Oxy) \end{array}\right\} \Rightarrow OC \perp AB$$

Do đó $AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OH$ (1).

Tương tự, ta có $BC \perp (OH)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (ABC)$. Vậy mặt phẳng (ABC) chứa H(2; 1; –4) và nhận $\overrightarrow{OH} = (2; 1; -4)$ làm vectơ pháp tuyến.

Nên phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$2(x-2) + (y-1) - 4(z+4) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4z - 21 = 0.$$

Dạng 2: Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

a. Xác định vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

b. Tìm điều kiện để 2 mặt phẳng cắt nhau

Ví dụ: Cho 2 mặt phẳng (α): $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và mặt phẳng (β) có phương trình: $(m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$. Xác định m để 2 mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau.

Giải:

Ta có 2 mặt phẳng có phương trình:

$Ax + By + Cz + D = 0$ và $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ cắt nhau

$\Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$.

Do đó (α) cắt (β) $\Leftrightarrow 2 : (-m) : 3 \neq (m+3) : (-2) : (5m+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{m+3} \neq \dfrac{-m}{-2} \\ \dfrac{-m}{-2} \neq \dfrac{3}{5m+1} \\ \dfrac{3}{5m+1} \neq \dfrac{2}{m+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3 - 4 \neq 0 \\ 5m^2 + m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy với $m \neq 1$ thì mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) cắt nhau.

c. **Tìm điều kiện để 2 mặt phẳng song song**

Ví dụ 1: Cho 2 mặt phẳng (α) có phương trình: $3x + y - 2z + 1 = 0$ và mặt phẳng (β) có phương trình: $(m^2+2)x + my - m^2z + 2m = 0$. Xác định m để (α) // (β).

Giải:

Ta có 2 mặt phẳng có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ và $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ song song $\Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

Do đó 2 mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi

$$\frac{m^2+2}{3} = \frac{m}{1} = \frac{-m^2}{-2} \neq \frac{2m}{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - 2m = 0 \\ m \neq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với m = 2 thì (α) // (β).

***Ví dụ 2**:* Trong không gian (Oxyz), tìm các giá trị l, m để cặp mặt phẳng: $2x + ly + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$ song song với nhau

Giải:

Điều kiện cần và đủ để 2 mặt phẳng song song là 2 véctơ pháp tuyến của chúng cùng phương tức là:

$$\frac{2}{m} = \frac{l}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{m} = \frac{2}{-4} \\ \frac{l}{2} = \frac{2}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ l = -1 \end{cases}.$$

Vậy với $m = -4$; $l = -1$ thì hai mặt phẳng đã cho song song với nhau

d. Xác định tham số để các mặt phẳng có một điểm chung.

***Ví dụ**:* Xác định a, b để ba mặt phẳng:

(α): $(a - 1)x + (b + 1)y - z + 9 = 0$, (β): $x - 2by + z - (a + b + 5) = 0$ và (γ): $(2a - 1)x - y + (b + 5)z = 0$ có một điểm chung là $M = (-2; 1; 4)$.

Giải:

Thế tọa độ điểm M vào phương trình 3 mặt phẳng ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2(a - 1) + (b + 1) - 4 + 9 = 0 \\ -2 - 2b + 4 - (a + b + 5) = 0 \\ -2(2a - 1) - 1 + 4(b + 5) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -8 \\ a + 3b = -3 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy với $a = 3$, $b = -2$ thì 3 mặt phẳng đã cho có một điểm chung là: $M(-2, 1, 4)$

Dạng 3: Công thức tính khoảng cách

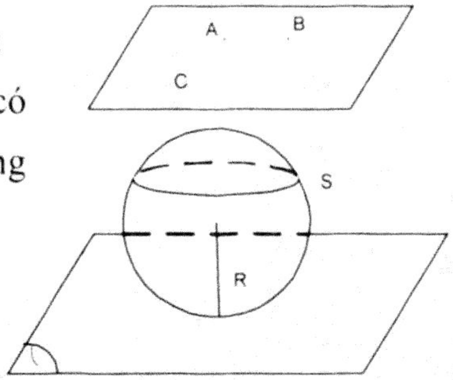
Ở đây chúng ta quan tâm đến vấn đề tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, dùng công thức đó để tính bán kính một mặt cầu biết tâm, tiếp xúc với một mặt phẳng, tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng v.v ...

***Ví dụ**:* Cho 3 điểm $A(0; 0; -3)$, $B(1; -2; 1)$ $C(1; 2; -5)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (ABC) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Giải:

Từ phương trình mặt cầu ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1, -3, 0)$ và bán kính $R = \sqrt{27}$.

Do mặt phẳng (α) song song với (ABC) nên mặt phẳng (α) nhận cặp vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 4)$; $\overrightarrow{AC} = (1; 2; -2)$ nên ta có thể chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) có dạng: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-4; 6; 4)$.



Suy ra phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$2x - 3y - y + D = 0$

Do mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên:

$$d(I,(\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.1 - 3(-3) + D|}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}.$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 34 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 23 \\ D = -45 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) thỏa mãn điều kiện bài ra là:

$2x - 3y - 2z + 23 = 0$; $2x - 3y - 2z - 45 = 0$.

Bài tập vận dụng

1. Trong không gian Oxyz, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm A(0; –1; 4) và nhận vectơ $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (-3; 0; 1)$ làm cặp vectơ chỉ phương .

2. Trong không gian Oxyz, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm A(2;1; –1) và vuông góc với đường thẳng xác định bởi 2 điểm B(–1; 0; –4) và C(0; –2; –1) .

3. Trong không gian Oxyz, cho $M_1(0; 2; -3)$, $M_2(1; -4; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(1; 3; -2)$ và vuông góc với đường thẳng M_1M_2 .

4. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M_1(2; -1; 1)$, $M_2(3; 1; 2)$ và song song với trục Oy .

5. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm $M_1(1; -1; -2)$, $M_2(3; 1; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng:

$x - 2y + 3z - 5 = 0$.

6. Trong không gian Oxyz, cho 2 mặt phẳng: (α): $2x + 3y + 4z - 12 = 0$; (α'): $3x - 6y + z + 1 = 0$. Xác định vị trí tương đối của 2 mặt phẳng này .

7. Trong không gian Oxyz, xác định tọa độ giao điểm G của ba mặt phẳng: (α) : $2x - y + z - 6 = 0$; (α') : $x + 4y - 2z - 8 = 0$; (α'') : $y = 0$.

8. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): $x+3y-z+2=0$ và $M(1;-1;2)$. Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α).Xác định tọa độ điểm H.

9. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ tại điểm $M_0(4; 3; 0)$.

10. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x + z + 5 = 0$.

11. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(2; -4; 3)$, $C(4; 5; 6)$.

12. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua điểm $M_0(1; 3; -2)$ và vuông góc với trục Oy.

13. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua điểm $M_0(1 ;3; -2)$ và vuông góc với đường thẳng BC, trong đó $B(0; 2; -3)$, $C(1; -4; 1)$.

14. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua điểm $M_0(1; 3; -2)$ và song song với mặt phẳng: $2x - y + 3z + 4 = 0$.

15. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua điểm $A(3; 1; -1)$, $B(2; -1; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng: $2x - y + 3z + 4 = 0$.

16. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua điểm $M_0(2; -1; 2)$, song song với trục Oz và vuông góc với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$.

17. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua điểm $M_0(-2; 3; 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (α): $2x + y + 2z + 5 = 0$; (α'): $3x + 2y + z - 3 = 0$.

18. Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm $A(0; 0; -3)$; $B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng (P): $3x - 8y + 7z - 1 = 0$, xác định tọa độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

19. Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm $A(0; 0; -3)$; $B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng (P): $3x - 8y + 7z - 1 = 0$, xác định tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC đều.

20. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng qua $M_0(1; 1; 1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích của khối tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất.

21. a. Tìm α để mặt phẳng $x - \frac{1}{4}y - z + 5 = 0$ và mặt phẳng:

$x\sin\alpha + y\cos\alpha + z\sin^3\alpha + 2 = 0$ vuông góc với nhau.

b. Tìm α để vectơ $\vec{u} = (\sin\alpha; 0; \sin\alpha\cos 2\alpha)$ song song với mặt phẳng (P): $x + y + 2z + 6 = 0$.

c. Cho hai mặt phẳng có phương trình $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó:

- Song song với nhau
- Trùng nhau
- Cắt nhau
- Vuông góc với nhau.

22. Viết phương trình của mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau:

a. Đi qua điểm $M_0(2;1;-1)$ và qua giao tuyến của hai mặt phẳng $x - y + z - 4 = 0$ và $3x - y + z - 1 = 0$.

b. Qua giao tuyến của mặt phẳng $y + 2z - 4 = 0$ và mặt phẳng: $x + y - z + 3 = 0$ đồng thời song song với mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$.

23. Xác định các giá trị k và m để ba mặt phẳng: $5x + ky + 4z + m = 0$; $3x - 7y + z - 3 = 0$; $x - 9y - 2z + 5 = 0$ cùng đi qua một đường thẳng.

24. Cho ba mặt phẳng:

$(P): x + y + z - 6 = 0; (Q): mx - 2y + z + m - 1 = 0$

$(R): mx + (m - 1)y - z + 2m = 0$

Xác định giá trị m để ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau. Tìm giao điểm chung của cả ba mặt phẳng đó.

25. Cho ΔABC vuông tại A có AB = a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = 3a. AD là đường cao ΔABC. E, F là trung điểm của SB, SC. H là hình chiếu của A trên EF.

a. Chứng minh H là trung điểm của SD.

b. Tính Cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACF).

c. Tính thể tích khối chóp A.BCFE.

26. Cho tứ diện SABC có ΔABC vuông cân đỉnh B, AB = a, SA ⊥ (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi D là trung điểm AC.

a. Chứng minh khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC).

b. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc SC, (α) cắt SC và SB tại M và N.

1. Chứng minh ΔAMN là thiết diện giữa mặt phẳng (α) và tứ diện SABC.

2. Tính thể tích khối chóp SAMN.

c. Tính cosin góc nhị diện φ = [A, SC, B].

27. Trong mặt phẳng (α) có góc vuông $\widehat{xOy}$. M, N lần lượt di động trên cạnh Ox, Oy sao cho OM + ON = a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) tại O lấy điểm S sao cho OS = a.

a. Tìm vị trí M, N để thể tích S.OMN lớn nhất.

b. Khi thể tích S.OMN lớn nhất hãy tính:

1. d(0,(SMN)).

2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.OMN

c. Khi M, N di động sao cho OM + ON = a.

Chứng minh: $\widehat{OSM} + \widehat{OSN} + \widehat{MSN} = 90$

28. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy là a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN biết (AMN)⊥(SBC).

29. Cho tứ diện OABC và OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = a, OB = $a\sqrt{2}$, OC = c (a > 0, c > 0). Gọi D là đỉnh đối diện đỉnh O của hình chữ nhật OADB, M là trung điểm BC, mặt phẳng (α) qua A và M cắt mặt phẳng (OCD) theo đường thẳng vuông góc với AM.

a. Gọi E là giao điểm (α) với OC. Tính OE.

b. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (α).

c. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp C.OADB.

30. Trên ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc từng đôi một lấy các điểm A, B, C sao cho OA = a, OB = b, OC = c. Gọi H, G là trực tâm, trọng tâm của ΔABC.

a. Tính OH, OG và $S_{\Delta ABC}$ theo a, b, c.

b. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn và $a^2 tgA = b^2 tgB = c^2 tgC$.

31. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60$. Gọi M là trung điểm của AA' và N là trung điểm của cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông. (*Trích đề thi khối B năm 2003*)

32. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 4, AA' = 6 Gọi I, J là trung điểm AB, C'D'. Gọi M, N thỏa

$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'}$ $(0 \le m \le 1)$.

a. Tính khoảng cách từ A đến (BDA').

b. Chứng minh I, M, J, N đồng phẳng.

c. Xác định tâm K và bán kính R của mặt cầu (S) ngoại tiếp ABDA'.

d. Tính bán kính r của đường tròn là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (BDA').

33. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có cạnh bằng 2. Gọi M, N là trung điểm của AB và DD'.

a. Chứng minh MN // (BDC'). Tính MN và d(MN, (BDC')).

b. Gọi P là trung điểm C'D'. Tính $V_{C.MNP}$ và góc giữa MN và BD.

c. Tính bán kính R của đường tròn (A'BD).

34. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên đường thẳng Δ lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng

vuông góc với Δ và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp ABCD và d(A, (BCD)) theo a.

Hướng dẫn

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là: $\vec{a} = \left[\vec{u}, \vec{v}\right] = (1; -3; 3)$

Suy ra phương trình mặt phẳng qua A(0; –1; 4) và nhận $\vec{a}$ làm véctơ pháp tuyến là: $x - 3(y + 1) + 3(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3z - 15 = 0$.

2. Mặt phẳng qua A(2; 1; –1) nhận $\overrightarrow{BC} = (1; -2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng là: $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

3. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm:

$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1; -6; 4)$. Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$x - 6y + 4z + 25 = 0$.

4. Mặt phẳng (α) qua M_1, M_2 và song song với Oy nên nhận $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\vec{J} = (0; 1; 0)$ làm cặp vec tơ chỉ phương.⇒ Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}; \vec{J}\right] = (-1; 0; 1)$. Và mặt phẳng (α) qua M_1 nên mặt phẳng (α) có phương trình: $x + z + 1 = 0$.

5.

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}_1 = (1; -2; 3)$ làm vec tơ chỉ phương nên mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = \left[\vec{n}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = (-12; 3; 6)$, do mặt phẳng (α) qua $M_1 = (1; -1, -2)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là:

$$-12(x - 1) + 3(y + 1) + 6(z + 2) = 0 \Leftrightarrow -4x + y + 2z + 9 = 0.$$

6. Câu C.

7. Tọa độ điểm G thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \\ x + 4y - 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \\ x - 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy G = (4; 0; –2).

8. Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 3; -1)$; H(x; y; z) là hình chiếu của M(1; –1; 2) lên mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} = t\vec{n} \\ H \in (\alpha) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = 3t \\ z - 2 = -t \\ x = 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $t = \frac{2}{11}$; $x = \frac{13}{11}$; $y = -\frac{5}{11}$; $z = \frac{20}{11}$.

9. Phương trình mặt phẳng là $x + 2y + 2z - 10 = 0$.

10. Mặt phẳng cần tìm nhận $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; -1)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 0; 1)$ của mặt phẳng $2x + z + 5 = 0$ làm cặp vectơ chỉ phương nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là: $\vec{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}\right]$ hay $\vec{n_1} = (1; 0; -2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Vậy phương trình mặt phẳng là: $x - 2z + 5 = 0$.

11.

- *Cách 1*: Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến là:

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (5; 3; 3)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-18; -9; 39).$$

Hiển nhiên $\frac{\vec{n}}{3} = (-6; -3; 13)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm. Vậy mặt phẳng cần tìm đi qua điểm A(–1; 2; 3) với vectơ pháp tuyến (–6; –3; 13) thì có phương trình là:

$-(x + 1) - 3(y - 2) + 13(z - 3) = 0$ hay $-6x - 3y + 13z - 39 = 0$.

Cách 2: Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Vì 3 điểm A, B, C nằm trên mặt phẳng đó, nên tọa độ của chúng phải thỏa mãn phương trình mặt phẳng và ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -A + 2B + 3C + D = 0 \ (1) \\ 2A - 4B + 3C + D = 0 \ (2) \\ 4A + 5B + 6C + D = 0 \ (3) \end{cases}$$

Ta khử D bằng cách lấy (1) – (2) và (3) – (2) ta có:

$$\begin{cases} -3A + 6B = 0 \\ 2A + 9B + 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 2B$$

$$\Rightarrow 4B + 9B + 3C = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{13}C.$$

Suy ra: $A = 2B = -\frac{6}{13}C$, $D = A - 2B - 3C = -3C$.

Ta có thể chọn $C = 13$, khi đó $A = -6$, $B = -3$, $D = -39$

Suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là: $-6x - 3y + 13z - 39 = 0$.

12. Mặt phẳng qua $M_0(1; 3; -2)$ vuông góc với trục Oy, nên nó song song với mặt phẳng (Oxz). Vậy phương trình của nó là $y = 3$. Hoặc ta có thể giải như sau: Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến: $\vec{n} = \vec{j} = (0; 1; 0)$ nên ta có phương trình mặt phẳng là:

$$0(x - 1) + 1(y - 3) + 0(z + 2) = 0 \Rightarrow y - 3 = 0.$$

13. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (1; -6; 4)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng cần tìm là: $1(x - 1) - 6(y - 3) + 4(z + 2) = 0$. Hay $x - 6y + 4z + 25 = 0$.

14. Mặt phẳng cần tìm song song với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$ nên phương trình mặt phẳng có dạng: $2x - y + 3z + D = 0$ với $D \neq 0$.

Vì $M_0(1; 3; -2)$ thuộc mặt phẳng đó nên: $2.1 - 3 + 3(-2) + D = 0$

$\Rightarrow D = 7$. Suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x - y + 3z + 7 = 0$.

Ta cũng có thể giải quyết bằng cách khác như sau:

Do hai mặt phẳng song song, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm có thể lấy là: $\vec{n} = (2; -1; 3)$. Vậy phương trình của nó là:

$$2(x - 1) - 1(y - 3) + 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 7 = 0.$$

15. Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng cần tìm vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 3)$ và $\vec{n'} = (2; -1; 3)$

(vectơ pháp tuyến của mặt phẳng: $2x - y + 3z + 4 = 0$).

Vậy ta lấy:

$$\overrightarrow{n''} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n'}\right] = \left(\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1;\ 13;\ 5) \text{ làm}$$

vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Do đó phương trình của nó là:

$-1(x - 3) + 13(y - 1) + 5(z + 1) = 0$ hay $x - 13y - 5z + 5 = 0$.

16. Gọi $\overrightarrow{n'}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n'} = (2; -1; 3)$. Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng cần tìm là:

$$\vec{n} = \left[\vec{j}, \overrightarrow{n'}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right) = (3;\ 0; -2).$$

Vậy phương trình của mặt phẳng là: $3x - 2z - 2 = 0$.

17. Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;\ 1;\ 2)$, $\overrightarrow{n_{\alpha'}} = (3;\ 2;\ 1)$

$$\overrightarrow{n'} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right) = (-3;\ 4;\ 1).$$

Vậy phương trình của mặt phẳng cần tìm là:

$-3(x + 2) + 4(y - 3) + 1(z - 1) = 0$ hay $3x - 4y - z + 19 = 0$.

18. Gọi I $(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; 0; 2)$; $\overrightarrow{AI} = (x; y; z + 13)$.

Vì $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương nên có một số k sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$

hay $\begin{cases} x = 2k \\ y = 0 \\ z + 3 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$

Mặt khác I $\in$ mặt phẳng (P) $\Rightarrow 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Vậy ta có hệ:

$\begin{cases} y = 0 \\ x - z - 3 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$ giải hệ ta được $x = \dfrac{11}{5}$; $y = 0$; $z = -\dfrac{5}{4}$.

$\Rightarrow \ I(\dfrac{11}{5};\ 0;\ -\dfrac{5}{4})$.

19. Ta có: $AB = 2\sqrt{2}$, gọi điểm phải tìm là C (x; y; z).Để tam giác ABC là tam giác đều, ta phải có:

$$\begin{cases} CA = 2\sqrt{2} \\ CB = 2\sqrt{2} \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ (x+2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phép thế, ta có 2 nghiệm và do đó có hai

điểm C: $\left[\begin{array}{l} C = (2; -2; -3) \\ C = (-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}) \end{array}\right.$.

20. Gọi A(a; 0; 0), B0; b; 0), C(0; 0; c) với a, b, c > 0 và (P) là mặt phẳng phải tìm. Phương trình của (P) là:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì $M_0 \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Thể tích của tứ diện OABC là: $V_{OAVC} = \frac{1}{6}abc$

Theo bất đẳng thức Cô - si:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 27$$

$\Rightarrow V_{OABC} \geq \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$, dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 3, khi đó phương trình mặt phẳng (P) là: x + y + z − 3 = 0.

21.

a) $\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi \end{array}\right.$ k, n ∈ Z

b) $\left[\begin{array}{l} \alpha = k\pi \\ \alpha = \pm\frac{\pi}{2} + l\pi \end{array}\right.$ k, l ∈ Z

c) Hai mặt phẳng song song với nhau

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \neq \frac{-6+m}{-10} \quad (*)$$

Ta có: $\begin{cases} \frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Nhưng với m = 1 ta có $\frac{m}{2} = \frac{1}{2}$ và $\frac{-6+m}{-10} = \frac{1}{2}$ tức là điều kiện (*) không thỏa mãn. Vậy không có giá trị nào của m để 2 mặt phẳng song song.

Từ đó suy ra: Hai mặt phẳng trùng nhau $\Leftrightarrow$ m = 1. Hai mặt phẳng cắt nhau $\Leftrightarrow m \neq 1$. Hai mặt phẳng vuông góc nhau khi:

$2(m+3) + m.2 + 3(5m+1) = 0$

$\Rightarrow 19m + 9 = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{19}$.

22. a. Gọi M (x; y; z) là điểm thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng, khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình ba ẩn số nhưng chỉ có hai phương trình. Ta tìm 2 nghiệm nào đó của hệ.

$$\text{Cho } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ y = \frac{-11}{2} \end{cases} \Rightarrow M = (\frac{-3}{2};\ \frac{-11}{2};\ 0) \in \Delta$$

$$\text{Cho } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - z = 4 \\ 3x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ z = \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{-3}{2};\ 0;\ \frac{11}{2}) \in \Delta$$

Mặt phẳng phải tìm chính là mặt phẳng đi qua M_0, M_1, M_2.

Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm trên, ta có kết quả: mặt phẳng phải tìm là: $15x - 7y + 7z - 16 = 0$.

b. *Cách 1*: Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y + 2z - 4 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta

được: $x_0 = \frac{1}{2}$; $y_0 = -1$; $z_0 = \frac{5}{2}$.

Điều này có nghĩa là giao tuyến của hai mặt phẳng:

$y + 2z - 4 = 0$ và $x + y - z + 3 = 0$ cắt mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$

Vậy không tồn tại mặt phẳng thoả mãn yêu cầu toán.

Cách 2: Ta tìm hai điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cho $z = 0 \Rightarrow M_1(-7; 4; 0)$. Cho $y = 0 \Rightarrow M_2(-1; 0; 2)$

Gọi (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$ nên (α) có dạng: $x + y + z + D = 0$.

Ta xác định D để $M_1, M_2 \in (\alpha)$. D là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} -7 + 4 + D = 0 \\ -1 + 2 + D = 0 \end{cases}$. Hệ phương trình này vô nghiệm.

Vậy không tồn tại mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu toán.

c. Ta tìm hai điểm M_1, M_2 thuộc giao tuyến hai mặt phẳng.

Gọi $\overrightarrow{n'} = (2; 0; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - z + 7 = 0$.

Khi đó mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng đi qua M_1 và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{n'}\right]$ suy ra ta có kết quả: Mặt phẳng cần tìm có phương trình:

$0 - 22y + 2z + 21 = 0 \Leftrightarrow 22y - 2z - 21=0.$

23. Để ba mặt phẳng đã cho đi qua một đường thẳng, cần và đủ là mặt phẳng $5x + ky + 4z + m = 0$ phải chứa hai điểm phân biệt của đường thẳng Δ là giao giao tuyến của hai mặt phẳng còn lại. Ta tìm hai điểm đó của đường thẳng Δ.

Cho y = 0 ta có:

$$\begin{cases} 3x + z = 3 \\ x - 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{1}{7};\ 0;\ \frac{18}{7}\right) \in \Delta.$$

$$\text{Cho } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = 3 \\ x - 9y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{31}{10} \\ y = \dfrac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow M_2\left(\frac{31}{10};\ \frac{9}{10};\ 0\right) \in \Delta.$$

Thay tọa độ điểm M_1, M_2 vào phương trình mặt phẳng: $5x + ky + 4z + m = 0$

Ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{5}{7} + \dfrac{72}{7} + m = 0 \\ \dfrac{155}{10} + \dfrac{9k}{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -5,\ m = -11.$$

Vậy với k = –5; m = –11 thì ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng.

24. Vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt là:

$\overrightarrow{n_P} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{n_Q} = (m;-2;1)$, $\overrightarrow{n_R} = (m;m-1;-1)$

Để ba mặt phẳng đôi một vuông góc ta có: $\begin{cases} m - 2 + 1 = 0 \\ m + m - 1 - 1 = 0 \\ m^2 - 2m + 2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ (m-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1$

Gọi I = (x, y, z) là giao điểm chung của cả ba mặt phẳng. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ

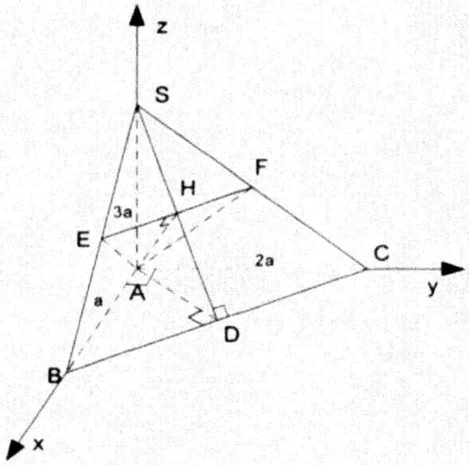
$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2 + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1;\ 2;\ 3).$

25. Chọn hệ trục tọa độ Axyz, ta có: A (0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(0; 2a; 0); S(0; 0; 3a); $E(\frac{a}{2}; 0; \frac{3a}{2})$; $F(0; a; \frac{3a}{2})$.

a. Chứng minh H là trung điểm của SD

Ta có : $\overrightarrow{FE} = \left(\frac{a}{2};-a;0\right) = \frac{a}{2}(1;-2;0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t\ (t \in R) \\ z = \frac{3a}{2} \end{cases}$



$H \in (FE) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(t; a - 2t; \frac{3a}{2}\right)$

$\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{AH} = 0$

$\Rightarrow \frac{a}{2}(1;-2;\ 0)\left(t;\ a - 2t;\ \frac{3a}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow t = \dfrac{2a}{5} \Rightarrow H\left(\dfrac{2a}{5};\ \dfrac{a}{5};\ \dfrac{3a}{2}\right)$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{2a}{5};\ \dfrac{a}{5};\ 0\right)(-a;\ 2a;\ 0) = 0$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\ SH\ \perp\ BC \\ \text{mà } SD\ \perp\ BC \text{ (do } BC\ \perp\ AD,\ BC\ \perp\ SA)\end{array}\right\}$ Nên $H \in SD$

$\Rightarrow$ H là trung điểm của SD (do EH là đường trung bình tam giác SBC)

$\Rightarrow\ D\left(\dfrac{4a}{5};\ \dfrac{2a}{5};\ 0\right).$

b. Tính cosφ.

Ta có: $BC \perp (SAD) \Rightarrow FE \perp (SAD)$ (do EF // BC)

Mà $\begin{cases}(SAD) \cap (ABC) = AD \\ (SAD) \cap (AEF) = AH\end{cases}$. Nên $\cos\ \varphi = \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH}})\right|$

Do $\overrightarrow{AH} = \dfrac{a}{10}(4;\ 2;\ 15)$, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2a}{5}(2;\ 1;\ 0)$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{|(4;\ 2;\ 15)(2;\ 1;\ 0)|}{\sqrt{16+4+225}\sqrt{2^2+1^2+0^2}} = \dfrac{2}{7}.$

c. Tính $V_{A.BCFE}$.

Ta có: $\overrightarrow{AS} = (0;\ 0;\ 3a)$; $\overrightarrow{AE} = \left(\dfrac{a}{2};\ 0;\ \dfrac{3a}{2}\right)$; $\overrightarrow{AF} = \left(0;\ a;\ \dfrac{3a}{2}\right)$

$V_{ASEF} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AE}\right]\overrightarrow{AF}\right| = \dfrac{a^3}{4}$

$V_{ASBC} = \dfrac{1}{6}AS.AB.AC = a^3$. Vậy $V_{A.BCFE} = V_{ASBC} - V_{ASEF} = \dfrac{3a^3}{4}$ (đvtt).

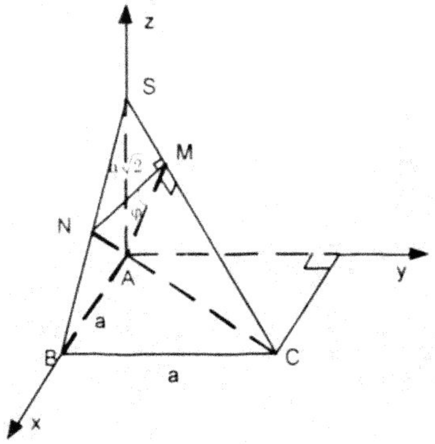
* Chú ý: $S_{\Delta SEF} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta SBC}\ \Rightarrow\ V_{A.SEF} = \dfrac{1}{4}V_{A.SBC} = \dfrac{a^3}{4}$.

26. Trong mặt phẳng (ABC) vẽ $Ay \perp AB$. Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), $S(0;\ 0;\ a\sqrt{2}) \Rightarrow D\left(\dfrac{a}{2};\ \dfrac{a}{2};\ 0\right)$

a. Chứng minh d(A, (SBC)) = 2d (D, (SBC))

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{BS} = \left(-a;\ 0;\ a\sqrt{2}\right) = -a\left(1;\ 0;\ -\sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{BC} = (0;\ a;\ 0) = a(0;\ 1;\ 0)\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = (\sqrt{2};\ 0;\ 1)$ suy ra phương trình mp(SBC) là:



$\sqrt{2}(x - a) + z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x + z - a\sqrt{2} = 0$

$$d(A,(SBC)) = \frac{\left|-a\sqrt{2}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6};$$

$$d(D,(SBC)) = \frac{\left|\frac{a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy d(A, (SBC))= 2d (D, (SBC)).

b. Ta có: $\overrightarrow{SC} = \left(a; a; -a\sqrt{2}\right) = a(1; 1; -\sqrt{2})$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1;\ 1;\ -\sqrt{2}) \Rightarrow pt(\alpha) : x + y - \sqrt{2}z = 0$$

Phương trình tham số của đường thẳng SB là: $\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \quad (t \in R) \\ z = -\sqrt{2}t \end{cases}$

Thay x, y, z vào phương trình mặt phẳng (α), ta có:

$a + t + 2t = 0 \Rightarrow t = -\frac{a}{3} \Rightarrow N = \left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$. ΔASC vuông cân tại A

(AS = AC = $a\sqrt{2}$). M là trung điểm của SA $\Rightarrow M = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

1. Chứng minh Δ AMN là thiết diện:

Ta có: $\overrightarrow{NS}.\overrightarrow{NB} = \left(\frac{-2a}{3};\ 0;\ \frac{2a\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{a}{3};\ 0;\ \frac{-a\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{-2a^2}{3} < 0$

$\Rightarrow$ N thuộc cạnh SB; M trung điểm SC

Vậy Δ AMN là thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp SABC.

2. Tính V_{SAMN} : $\overrightarrow{AS} = \left(0;\ 0;\ a\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\overrightarrow{AN} = \left(\frac{2a}{3};\ 0;\ \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AM}.\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};\ -\ \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

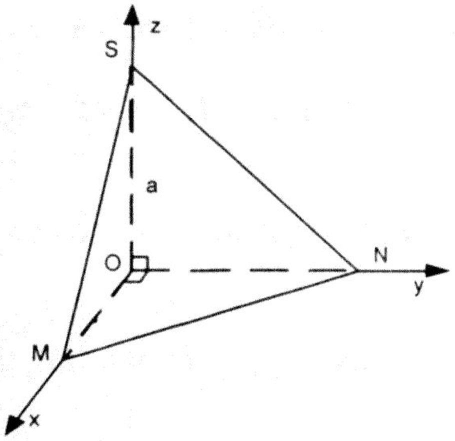
Nên $V_{SAMN} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AM}.\right].\overrightarrow{AN}\right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$

c. Tính cos φ.

Ta có: (AMN) ⊥ SC $\Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ MN \perp SC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}}\right)$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN}}{MA.MN} = \frac{-\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{a}{6}; \frac{-a}{2}; \frac{-a\sqrt{2}}{6}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}\right)\left(\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{36}\right)}}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



28. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz: O(0; 0; 0), M(m; 0; 0), N(0, n; 0), S(0; 0; a)

Với m, n > 0 và m + n = a.

a. Tìm M, N để $(V_{S,OMN})_{max}$

$$V_{S.OMN} = \frac{1}{6}a.m.n \le \frac{a}{6}\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{24}$$

$$\Rightarrow (V_{S.OMN})_{max} = \frac{a^3}{24} \Leftrightarrow m = n = \frac{a}{2}.$$

b. Khi $(V_{S.OMN})_{max}$ thì $M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$

1. Tính d(O, (SMN)):

Ta có phương trình mặt phẳng (SMN) là:

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a}{2}} + \frac{z}{a} = 1 \Leftrightarrow 2a + 2y + z - a = 0$$

$$\Rightarrow d(O;(SMN)) = \frac{a}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{a}{3}.$$

2. Tính R: Phương trình mặt cầu (S):

Thế tọa độ các điểm M, N, S vào phương trình mặt cầu (S) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{4} - \alpha a = 0 \\ \dfrac{a^2}{4} - \beta a = 0 \\ a^2 - 2\gamma a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{4} \\ \beta = \dfrac{a}{4} \\ \gamma = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

c. Chứng minh: $\widehat{OSM} + \widehat{OSN} + \widehat{MSN} = 90^\circ$

Đặt: $\alpha = \alpha = \widehat{OSM}$, $\beta = \widehat{OSN}$, $\gamma = \widehat{MSN}$

$$\sin\gamma = \frac{2S_{\Delta SMN}}{SM.SN} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN}\right]\right|}{SM.SN} = \frac{\left|\left[(m; 0; -a)(0; n; -a)\right]\right|}{\sqrt{m^2 + a^2}\sqrt{n^2 + a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{m^2a^2 + n^2a^2 + m^2n^2}}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}}.$$

$$\sin\alpha = \frac{OM}{SM} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + a^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{OS}{SM} = \frac{a}{\sqrt{m^2 + a^2}}.$$

$$\sin\beta = \frac{ON}{SN} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + a^2}}, \quad \cos\beta = \frac{OS}{SN} = \frac{a}{\sqrt{n^2 + a^2}}.$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}} - \frac{mn}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}}$$

$$= \frac{a^2 - mn}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}}.$$

Mặt khác: $m^2a^2 + n^2a^2 + m^2n^2 = a^2(m^2 + n^2) + m^2n^2$

$$= a^2\left[(m + n)^2 - 2mn\right] + m^2n^2 = a^4 - 2a^2mn + m^2n^2 = \left(a^2 - mn\right)^2.$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = \cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - mn}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}} \Rightarrow \gamma + \alpha + \beta = 90^\circ.$$

29. Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC) $\Rightarrow$ O là trọng tâm ΔABC

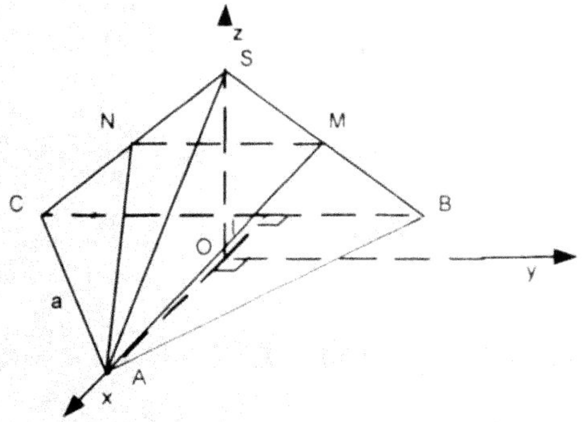
(do S.ABC là chóp tam giác đều)

Gọi I là trung điểm BC

Ta có:

$AI = BC\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

O (0; 0; 0), A$\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$; S(0; 0; S) (a, s > 0)

$\Rightarrow I\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$, $B\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$

$M\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12}; \dfrac{a}{4}; \dfrac{s}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12}; -\dfrac{a}{4}; \dfrac{s}{2}\right)$ suy ra

$\vec{AM} = \left(-\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}; \dfrac{a}{4}; \dfrac{s}{2}\right)$; $\vec{AN} = \left(\dfrac{-5a\sqrt{3}}{12}; \dfrac{-a}{4}; \dfrac{a}{2}\right)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\vec{AM}, \vec{AN}\right] = \left(\dfrac{as}{4}; 0; \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)$; $\vec{SB} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}; \dfrac{a}{2}; -s\right)$;

$\vec{SC} = \left(\dfrac{-a\sqrt{3}}{6}; \dfrac{-a}{2}; -s\right) \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = \left[\vec{SB}, \vec{SC}\right] = \left(-as; 0; \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$.

$(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{AMN}.\vec{n}_{SBC} = 0 \Rightarrow -\dfrac{a^2s^2}{4} + \dfrac{5a^4}{48} = 0 \Rightarrow s = \dfrac{a\sqrt{4}}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\vec{AM}, \vec{AN}\right]\right\| = \dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{a^2\sqrt{15}}{24}; 0; \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)\right|$.

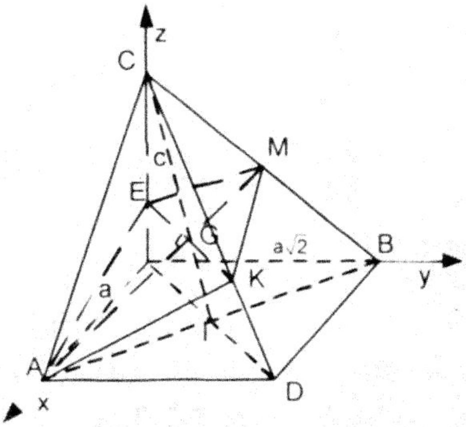
Vậy $S_{\Delta AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt).

30. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

O (0; 0; 0), A(a; 0; 0), B (0; $a\sqrt{2}$; 0), C (0; 0; c) $\Rightarrow M\left(O; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; \dfrac{c}{2}\right)$.

a. Tính OE: Gọi I là tâm OADB, G = CI ∩ AM

$\Rightarrow$ G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow G\left(\frac{a}{3};\ \frac{a\sqrt{2}}{3};\ \frac{c}{3}\right)$



$E \in OC \Rightarrow E(0;\ 0;\ e)$

Ta có: $(\alpha) \cap (OCD) = EG$

$\Rightarrow \vec{EG}.\vec{AM} = 0$ (do $EG \perp AM$)

$\Rightarrow \left(\frac{a}{3};\ \frac{a\sqrt{2}}{3};\ \frac{c}{3} - e\right)\left(-a;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{c}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow e = \frac{c}{3} \Rightarrow E\left(0;\ 0;\ \frac{c}{3}\right)$. Vậy $OE = \frac{c}{3}$.

b. Tính $d(C, (\alpha))$

$\vec{n}_{(\alpha)} = \left[\vec{AM}, \vec{EG}\right] = -\frac{a}{6}\left(c\sqrt{2};\ -c;\ 3a\sqrt{2}\right)$ suy ra phương trình mặt phẳng (α) là : $c\sqrt{2}(x - a) - cy + 3a\sqrt{2}z = 0$

$$\Leftrightarrow c\sqrt{2}x - cy + 3a\sqrt{2}z - ac\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow d(C, (\alpha)) = \frac{\left|3a\sqrt{2}.c - ac\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2c^2 + c^2 + 18a^2}} = \frac{2ac\sqrt{2}}{\sqrt{18a^2 + 3c^2}}.$$

c. Tính diện tích thiết diện.

Trong (OCD), gọi $K = EG \cap CD \Rightarrow$ Thiết diện là tứ giác AKME

Do $\frac{CE}{CO} = \frac{CG}{CI} = \frac{2}{3}$ nên: $EG \parallel OD \Rightarrow EK \parallel OD$ suy ra

G là trung điểm của EK

$$\Rightarrow S_{AKME} = 2S_{\Delta AME} = EG.AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{6a^2 + c^2}}{2}$$

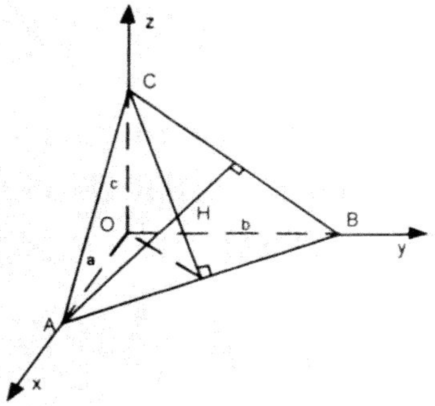
$$\text{Vậy } S_{AKME} = \frac{a\sqrt{18a^2 + 3c^2}}{6} \text{ (đvdt).}$$

31. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: O (0; 0; 0), A (a; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c)

a. Tính OH, OG, $S_{\Delta ABC}$

* Tính OG: $G\left(\frac{a}{3};\ \frac{b}{3};\ \frac{c}{3}\right)$

$\Rightarrow OG = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



* Tính $S_{\Delta ABC}$:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[(-a;b;0),(-a;0;c)\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(bc;ac;ba)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Tính OH: Ta có: $AB \perp CH$; $AB \perp OC$ (do $OC \perp (OAB)$)

$\Rightarrow AB \perp (OCH); AB \perp CH; AB \perp OC \Rightarrow OH \perp (ABC)$

$\Rightarrow OH = d(O,(ABC))$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz = 0$ nên $OH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

b. Chứng minh ΔABC nhọn.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-a;b;0)(-a;0;c) = a^2 > 0$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} > 0 \Rightarrow$ A nhọn. Tương tự: B, C nhọn (đpcm).

* Chứng minh $a^2tgA = b^2tgB = c^2tgC$

Ta có: $\begin{cases} \sin A = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB.AC} \\ \cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} \end{cases} \Rightarrow tgA = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} \Rightarrow a^2tgA = 2S_{\Delta ABC}$.

Tương tự $a^2tgA = b^2tgB = c^2tgC = 2S_{\Delta ABC}$.

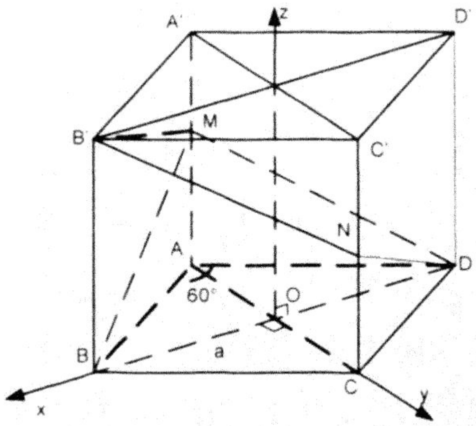
32. Ta có ABCD là hình thoi có $\widehat{BAD} = 60 \Rightarrow \Delta$ ABD đều cạnh a. Đặt AA' = h, gọi O là tâm của ABCD.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: O(0; 0; 0), $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$,

$C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B'\left(\dfrac{a}{2};0;h\right) \Rightarrow D\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $D'\left(-\dfrac{a}{2};0;h\right)$.

$C'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right)$, $A'\left(0; \frac{-a\sqrt{3}}{2}; h\right)$, $M\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}\right)$, $N\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}\right)$.

Chứng minh B', M, D, N đồng phẳng:



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}\right) \\ \overrightarrow{DN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}\right) \\ \overrightarrow{DB'} = (a; 0; h) \end{cases}$

$$\left[\overrightarrow{DB'}, \overrightarrow{DN}\right] = \left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left[\overrightarrow{DB'}, \overrightarrow{DN}\right]\overrightarrow{DM} = \left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2}\right)\frac{a}{2} + 0.\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{h}{2} = 0$$

Vậy B', M, D, N đồng phẳng.

Tính AA' theo a:

Ta có: $B'N = ND = DM = MB' = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}} \Rightarrow$ B'MDN là hình thoi.

Để B'MDN là hình vuông thì $DM \perp DN \Rightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + \frac{h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = a\sqrt{2}. \text{ Vậy } AA' = a\sqrt{2}.$$

33. Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho:

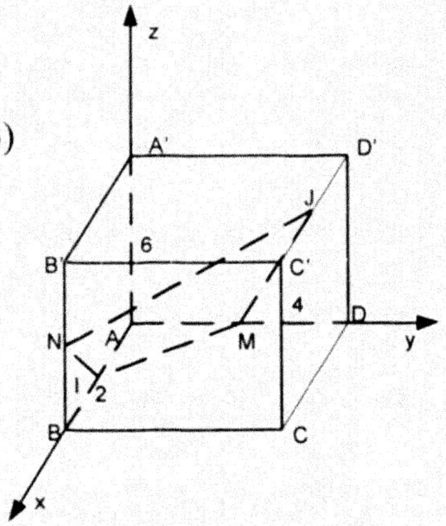
A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 4; 0), A'(0; 0; 6)

C(2; 4; 0), B'(2; 0; 6), C'(2; 4; 6), D'(0; 4; 6)

$\Rightarrow$ I(1; 0; 0), J(1; 4; 6)

$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD} = m(0;4;0) \Rightarrow M(0;4m;0)$

$\overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BB'} = m(0;0;6) \Rightarrow N(2;0;6m)$



a. Tính d(A, (BDA'))

Phương trình mặt phẳng (BDA') là:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$

$\Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \Rightarrow d\left(A,(BDA')\right) = \dfrac{12}{\sqrt{36+9+4}} = \dfrac{12}{7}$.

b. Chứng minh I, M, J, N đồng phẳng

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IM} = (-1;\ 4m;\ 0) \\ \overrightarrow{IN} = (1;\ 0;\ 6m) \\ \overrightarrow{IJ} = (0;\ 4;\ 6) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}\right] = (-24m;\ -6;\ 4)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}\right]\overrightarrow{IM} = 24m - 24m = 0,\ \forall m \in [0;1]$.

Vậy I, M, J, N đồng phẳng.

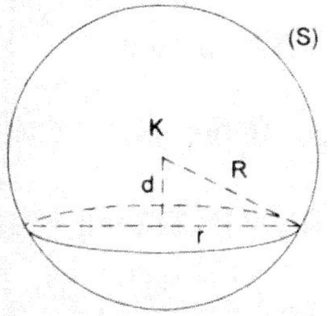
c. Xác định bán kính R và vị trí điểm K:

Phương trình mặt cầu (S) là:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0\left(\text{do } A \in (S)\right)$

B, D, A' $\in$ (S), suy ra:

$\begin{cases} 4 - 4a = 0 \\ 16 - 8b = 0 \\ 36 - 12c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow K(1;2;3) \text{ và } R = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.



Vậy K là trung điểm AC' và R = $\sqrt{14}$.

d. Tính r

Gọi d là khoảng cách từ K đến (BDA')

$$d = \frac{|6.1 + 3.2 + 2.3 - 12|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}.$$

Ta có: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{14 - \dfrac{36}{49}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{7}$. Vậy $r = \dfrac{5\sqrt{26}}{7}$.

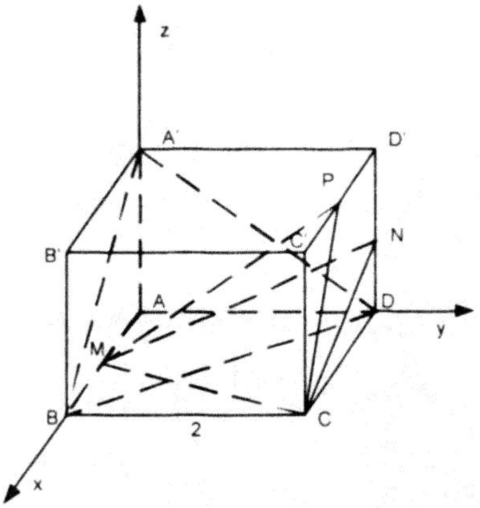
34. Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho :

A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(2; 2; 0), D(0; 2; 0), A'(0; 0; 2), B'(2; 0; 2), C'(2; 2; 2), D'(0; 2; 2)

$\Rightarrow$ M(1; 0; 0), N(0; 2; 1), P(1; 2; 2).

a. Chứng minh MN // (BDC')

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-1;2;1) \\ \overrightarrow{BD} = (-2;2;0) \\ \overrightarrow{BC'} = (0;2;2) \end{cases}$



$\vec{n}_{(BDC')} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}\right] = (4;\ 4;\ -4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{n}_{(BDC')} = 0 \Rightarrow MN // (BDC')\quad (\text{do } M \notin (BDC'))$

Ta có: $MN = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ d(MN, (BDC')) = d(M, (BDC'))

(do MN// (BDC')). Phương trình mặt phẳng (BDC')là: $x + y - z - 2 = 0$

$\Rightarrow d\left(MN, (BDC')\right) = \dfrac{|1-2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b. Tính $V_{C.MNP}$ và $\varphi = \left(\widehat{MN, BD}\right)$ Ta có:

$V_{C.MNP} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]\overrightarrow{MC}\right| = 1;$

$\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}\right|}{MN.BD} = \dfrac{\left|(-1;2;1)(-2;2;0)\right|}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $\varphi = 30°$.

c. Tính R.

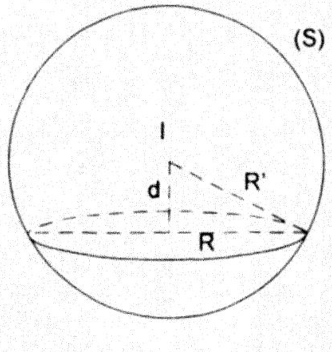
Gọi I , R' là tâm và bán kính của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lập phương suy ra I là trung điểm của AC' và $R' = \dfrac{AC'}{2} \Rightarrow I(1;\ 1;\ 1),\quad R' = \sqrt{3}$

Phương trình mp(A'BD) là: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0$.

$d = d\left(I, (A'BD)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.Ta có: A', B, D $\in$ (S)

$\Rightarrow$ đường tròn (A'BD) = (A'BD) $\cap$ (S)

$\Rightarrow R = \sqrt{R'^2 - d^2} = \sqrt{3 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

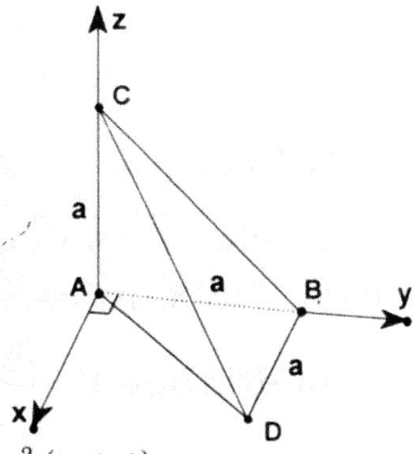


Vậy $R = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

35. Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; 0; a), D(a; a; 0). Phương trình mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0.$$

Thế tọa độ các điểm A, B, C, D vào phương trình mặt cầu ta có hệ phương trình :



$$\begin{cases} a^2 = 2\beta a \\ a^2 = 2\gamma a \\ 2a^2 = 2\alpha a + 2\beta a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{2} \\ \beta = \dfrac{a}{2} \\ \gamma = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{n}_{(BCD)} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = \left[(0; -a; a), (a; 0; 0)\right] = a^2(a; 1; 1)$$

$$\Rightarrow \text{pt(BCD)}: y + z - a = 0 \Rightarrow d\left(A, (BCD)\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Kiến thức cơ bản

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng có dạng:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

với điều kiện $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ hoặc $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ hoặc $\frac{C}{C'} \neq \frac{A}{A'}$.

Mỗi phương trình của hệ biểu thị một mặt phẳng, và điều kiện trên chứng tỏ hai mặt phẳng cắt nhau. Như vậy hệ phương trình cho ta đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng. Khi đó, vectơ chỉ phương của đường thẳng có thể lấy là $\vec{u} = \left[\vec{n}, \vec{n'}\right]$ với $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$, $\vec{n'} = (A';\ B';\ C')$.

2. Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ có:

- Phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $\quad t \in R.$

Mỗi giá trị t cho ta giá trị x, y, z tương ứng là tọa độ của một điểm M thuộc đường thẳng.

- Phương trình chính tắc là:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \text{ với điều kiện } abc \neq 0.$$

3. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d (đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$) với đường thẳng d' (đi qua M_0' và có vtcp $\vec{u'}$).

+ d và d' cùng nằm trong một mặt phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0$.

+ d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \\ \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$.

+ d // d' $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \left[\vec{u}.\vec{u'}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u},\ \overrightarrow{M_0'M_0}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$.

+ d ≡ d' ⇔ $\left[\vec{u}.\vec{u'}\right] = \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M_0'}\right] \neq \vec{0}$.

+ d, d' chéo nhau ⇔ $\left[\vec{u}.\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$.

Khi giải bài tập, nếu biết phương trình của 2 đường thẳng d, d' ta cũng có thể xét vị trí tương đối giữa chúng bằng cách giải hệ phương trình để tìm giao điểm.

Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì d, d' cắt nhau.

Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì d ≡ d'.

Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì d, d' song song hoặc chéo nhau, lúc đó xét thêm vectơ chỉ phương của chúng, 2 đường thẳng chéo nhau thì 2 vectơ đó khác phương.

4. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ với mặt phẳng (α) có phương trình:

$Ax + By + Cz + D = 0.$

+ d cắt (α) ⇔ $Aa + Bb + Cc \neq 0$.

+ d // (α) ⇔ $\begin{cases} Aa + Bb + Cc \neq 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0 \end{cases}$.

+ d ⊂ (α) ⇔ $\begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$.

+ d ⊥ (α) ⇔ $\vec{u}$, $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương ⇔ $\left[\vec{u}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = \vec{0}$.

Cũng có thể xét vị trí tương đối của d và (α) bằng cách xét hệ phương trình để tìm giao điểm.

5. Góc.

+ Cho hai đường thẳng d, d' lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ và $\vec{u'} = (a'; b'; c')$. Góc φ giữa hai đường thẳng được tính theo công thức:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}.\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u'}\right|} = \frac{\left|aa' + bb' + cc'\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq 90^0).$$

+ Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ và mp (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B; C)$. Gọi φ là góc hợp bởi d và (α) thì được tính theo công thức:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6. Khoảng cách.

+ Khoảng cách từ điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ tới đường thẳng d (đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$

Cách 1: - Viết phương trình mp(α) qua M_1 và vuông góc với đường thẳng d

- Tìm tọa độ giao điểm H của d và (α)
- $d(M_1, d) = M_1H$

Cách 2: $d(M_1, d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng d (đi qua M_0 với vectơ chỉ phương $\vec{u}$) và d' (đi qua M_0' với vectơ chỉ phương $\vec{u'}$) (d và d' chéo nhau)

Cách 1: - Viết phương trình mp(α) chứa d và song song với d'

- Tính khoảng cách từ M_0' đến mp(α)
- $d(d, d') = d(M_0', (\alpha))$

Cách 2: $d(d,d') = \dfrac{\left|\left[\vec{u}.\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương trình của đường thẳng

- Để viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng d ta làm như sau:

  + Xác định một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in d$.

  + Xác định một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a; b; c)$ của (d).

  Khi đó:

  + *Phương trình tham số của (d) có dạng:* $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in R)$

Trong đó: $a^2 + b^2 + c^2 > 0$

+ Phương trình chính tắc của (d) có dạng:

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ với a, b, c $\neq 0$.

- Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng d, ta làm như sau:

Cách 1: d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), ta xác định phương trình tổng quát của (P) và (Q).

Cách 2: + Xác định phương trình tham số của đường thẳng d.

+ Khử tham số t của phương trình tham số ta suy ra phương trình tổng quát.

Cách 3: + Xác định phương trình chính tắc của d.

+ Từ phương trình chính tắc suy ra phương trình tổng quát.

Chú ý: Một đường thẳng có vô số phương trình tham số, phương trình chính tắc và phương trình tổng quát.

- ***Ví dụ***: Viết phương trình tham số, tổng quát, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây:

a. Đường thẳng đi qua điểm A(4; 3; 1) và song song với đường thẳng có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

b. Đường thẳng d_2 đi qua điểm B(1; 2; –1) và song song với đường thẳng có phương trình: $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$

c. Đường thẳng d_3 đi qua gốc tọa độ, vuông góc với trục Ox và vuông góc với đường thẳng (Δ) có phương trình: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$.

Giải:

a. Đường thẳng d_1 thỏa mãn: $d_1 \begin{cases} \text{qua } A(4; 3; 1) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (2; -3; 2) \end{cases}$

+ Phương trình tham số của đường thẳng d_1 là: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

+ Phương trình chính tắc của đường thẳng d_1 là:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{2}$$

+ Phương trình tổng quát của đường thẳng d_1 là:

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-3}{-3}\\ \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{z-1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y-18=0\\ x-y-3=0\end{cases}.$$

b. Đường thẳng d_2 vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{n_1}=(1;\ 1;-1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;\ 5)$ nên nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;-7;-3)$.

Đường thẳng d_2 thỏa mãn: $\begin{cases}\text{qua } B(1;\ 2;-1)\\ \text{vtcp } \vec{n}=(4;-7;-3)\end{cases}$

+ Phương trình tham số của đường thẳng d_2 là: $\begin{cases}x=1+4t\\ y=2-7t\\ z=-1-3t.\end{cases}$

+ Phương trình chính tắc của đường thẳng d_2 là:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+1}{-3}.$$

+ Phương trình tổng quát của đường thẳng d_2 là:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-7}\\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{z+1}{-3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+4y-15=0\\ 3x+4y+1=0\end{cases}.$$

c. Đường thẳng (Δ): $\begin{cases}x+y=0\\ 2x-y+z=0\end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]$ với $\overrightarrow{n_1}=(1;\ 1;\ 0)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;\ 1)$ nên $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(1;-1;-3)$

Đường thẳng d_3 vuông góc với trục Ox và đường thẳng (Δ) nên có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}=\left[\vec{n},\vec{i}\right]=(0;-3;\ 1)$

Đường thẳng d_3 thỏa mãn: $\begin{cases}\text{qua } O(0;\ 0;\ 0)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}=(0;-3;\ 1).\end{cases}$

+ Phương trình tham số của đường thẳng d_3 là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = t. \end{cases}$

+ Phương trình tổng quát của đường thẳng d_3 là: $\begin{cases} x = 0 \\ y + 3z = 0. \end{cases}$

d_3 không có phương trình chính tắc.

Bài tập vận dụng

Tất cả các bài tập sau đều cho trong không gian với hệ tọa độ Oxyz.

1. Đường thẳng d qua hai điểm A(2; 0; –3) và B(1; 2; 1) có phương trình tham số là phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4t \\ z = -3 + 8t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -3 + 4t. \end{cases}$

2. Đường thẳng d đi qua hai điểm A(–4; 1; 4) và B(3; 5; 5) có phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x+4}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{1}$ B. $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1}$

C. $\frac{x-4}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{1}$ D. $\frac{x+3}{7} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+5}{1}$.

3. Đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 3x + y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d:

A. $\vec{n} = (3;\ 4;\ 11)$ B. $\vec{n} = (3;\ 11;\ 4)$

C. $\vec{n} = (3; -11;\ 4)$ D. $\vec{n} = (3;\ 11; -4)$.

4. Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua A(4; –2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (2; -4;\ 3)$ là:

A. $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 3y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 3y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 \\ 3x - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 3x - 2z - 6 = 0. \end{cases}$

5. Viết phương trình tham số, tổng quát, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng là các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

6. Viết phương trình tham số, tổng quát, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng đi qua điểm A(1; 2; 3) và song song với mỗi trục tọa độ.

7. Viết phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng

(d): $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$.

8. Viết phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng (d) đi qua điểm A (2; 0; –3) và vuông góc với mặt phẳng (P):
$2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

9. Viết phương trình tham số, chính tắc và tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm A (2;0;–3) và vuông góc với hai đường thẳng:

$d_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$; $d_2 : \begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$.

10. *(ĐH Huế - 99)*
Trong không gian Oxyx, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(1;3;2), B(1; 2; 1) và C(1; 1; 3). Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua trọng tâm của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó.

Hướng dẫn

1. Câu B.
$\overrightarrow{AB} = (-1;\ 2;\ 4)$; A(2; 0; –3).

2. Câu A.
$\overrightarrow{AB} = (7;\ 4;\ 1)$, qua A(–4; 1; 4).

3. Câu B.
Có $\overrightarrow{n_1} = (1; -1;\ 2)$; $\overrightarrow{n_2} = (3;\ 1; -5)$

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right) = (3;\ 11;\ 4).$$

4. Câu D.

Phương trình chính tắc của d: $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{3}$

Phương trình tổng quát d: $\begin{cases} \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+2}{-4} \\ \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{z-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$.

5. + Trục tọa độ Ox là giao của mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (Oxz) nên Ox có phương trình tổng quát: $\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Trục Ox đi qua điểm O(0; 0; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1;\ 0;\ 0)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ và không có phương trình chính tắc.

+ Tương tự, trục Oy có phương trình tổng quát $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

và phương trình tham số: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

+ Tương tự, trục Oz có phương trình tổng quát $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Và phương trình tham số: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

6. + Đường thẳng d_1 song song với trục Ox thỏa mãn: qua A(1; 2; 3); vtcp $\vec{i} = (1;\ 0;\ 0)$

Phương trình tham số của đường thẳng d_1 là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Phương trình tổng quát của đường thẳng d_1 là: $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

+ Đường thẳng d_2 song song với trục Oy thỏa mãn:

qua A (1; 2; 3); vtcp $\vec{j} = (0;\ 1;\ 0)$

Phương trình tham số của đường thẳng d_2: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$

Phương trình tổng quát của đường thẳng d_2: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

+ Đường thẳng d_3 song song với trục Oz thỏa mãn:

qua A (1; 2; 3); vtcp $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$

Phương trình tham số của đường thẳng d_3: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$

Phương trình tổng quá của đường thẳng d_3: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

7. Lấy điểm $A(2;-1;\ 0) \in (d)$

Đường thẳng d có vtcp $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (4;\ 14;\ 8).$

Đường thẳng d thỏa mãn: qua $A(2;-1;\ 0)$; vtcp $\vec{u} = (2;\ 7;\ 4)$

Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z}{4}$.

8. Mặt phẳng (P): $2x - 3y + 5y - 4 = 0$ có vtcp $\vec{n} = (2;-3;\ 5)$

Đường thẳng d thỏa mãn:

$d : \begin{cases} \text{qua } A\ (2;\ 0;-3) \\ d \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } A\ (2;\ 0;-3) \\ \text{vtcp } \vec{n} = (2;-3;\ 5) \end{cases}$

+ Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$

+ Phương trình chính tắc của đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$.

+ Phương trình tổng quát của đường thẳng d:

$$d: \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} \\ \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 5y + 3z + 9 = 0 \end{cases}.$$

9. Đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ có một vtcp $\overrightarrow{u_1} = (-1;\ 1; -1)$.

Đường thẳng $d_2 : \begin{cases} 3x - y + 4z + 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$ có một vtcp $\overrightarrow{u_2} = (-5;\ 1;\ 4)$.

Đường thẳng d vuông góc với d_1 và d_2 nên vtcp $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]$

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \right) = (5;\ 9;\ 4).$$

Đường thẳng d thỏa mãn: $d: \begin{cases} \text{qua } A(2;\ 0; -3) \\ \text{vtcp } \vec{u} = (5;\ 9;\ 4). \end{cases}$

+ Phương trình tham số của đường thẳng d: $d: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 9t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

+ Phương trình chính tắc của đường thẳng d:

$$d: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{9} = \frac{z+3}{4}.$$

+ Phương trình tổng quát của đường thẳng d:

$$d: \begin{cases} 9x - 5y - 18 = 0 \\ 4y - 9z - 27 = 0 \end{cases}.$$

10. Gọi $(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$G:\begin{cases}3x_G = x_A + x_B + x_C\\ 3y_G = y_A + y_B + y_C\\ 3z_G = z_A + z_B + z_C\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}x_G = 1\\ y_G = 2\\ z_G = 2\end{cases} \Leftrightarrow G(1;\ 2;\ 2).$$

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d, khi đó:

$$\begin{cases}\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}; \text{ với } \begin{cases}\overrightarrow{AB} = (0; -1; -1)\\ \overrightarrow{AC} = (0; -2;\ 1)\end{cases}$$

$$\text{Vậy } \vec{n} = \left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\right) = (-3;\ 0;\ 0).$$

Đường thẳng d thỏa mãn: qua G(1; 2; 2); vtcp $\vec{u} = (-3;\ 0;\ 0)$

Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases}x = 1 - 3t\\ y = 2\\ z = 2\end{cases}$

Dạng 2: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d đi qua M_0, một vectơ $\vec{u}$ chỉ phương và mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Căn cứ vào số điểm chung của d và (P) ta có 3 trường hợp:

- Đường thẳng d và mặt phẳng (P) không có điểm chung, ta nói đường thẳng d song song với mp(P). Khi đó:
  + Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng vô nghiệm.
  + Hoặc $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $M_0 \notin (P)$
- Đường thẳng d và mặt phẳng (P) có một điểm chung A, ta nói đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) . Khi đó:
  + Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng có nghiệm duy nhất.
  + Hoặc $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$
- Đường thẳng d và mặt phẳng (P) có hai điểm chung phân biệt, ta nói đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P). Khi đó:
  + Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng có vô số nghiệm.
  + Hoặc $\vec{u}.\vec{n} = 0$ và $M_0 \in (P)$

Ví dụ: Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (P), biết:

a. (d): $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$; (P): $x - 2y - z + 3 = 0$.

b. (d): $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$; (P): $x + z - 1 = 0$.

Giải:

a. Thay các giá trị x, y, z trong phương trình của đường thẳng d vào phương trình của mặt phẳng (P), ta được:

$(-1 - t) - 2(3 - t) - (-2 + t) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0$.

Phương trình vô nghiệm ⇒ đường thẳng d không cắt mặt phẳng (P) hay đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

b. Xét hệ phương trình tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có hệ:

$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ z = 2 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

⇒ đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm A $(-1; 6; 2)$.

Bài tập vận dụng

1. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $2x - y - 3z + 9 = 0$.

Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về quan hệ giữa d và (P)?

A. Cắt nhau tại A $(-1; -2; 3)$ và vuông góc với nhau.

B. Cắt nhau tại A $(-1; -2; 3)$ và không vuông góc với nhau.

C. Song song với nhau.

D. Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P).

2. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x - 3y - 2y - 7 = 0$.

Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về quan hệ giữa d và (P)?

A. d // (P)

B. $d \subset (P)$

C. d cắt (P) và không vuông góc với nhau.

D. d cắt (P) và vuông góc với nhau.

3. Cho đường thẳng d: $\frac{x-9}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$ và mặt phẳng (P): $x+2y-4z+1=0$.

Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về quan hệ của d và mặt phẳng (P)?

A. d // (P) B. $d \subset (P)$

C. d cắt (P) và không vuông góc với (P).

D. d cắt (P) và vuông góc với (P).

4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

d: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-2}{-4}$ và mặt phẳng (P): $x-3y-4m^2z+m=0$ (m là tham số). Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) khi và chỉ khi:

A. $m=\pm 1$ B. $m=1$

C. $m=-\frac{7}{8}$ D. $m=1,\ m=-\frac{7}{8}$.

5. Xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) cho bởi các phương trình:

a. d: $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$. (P): $3x-y+2z-8=0$.

b. d: $\begin{cases}2x+3y+6z-10=0\\ x+y+z+5=0.\end{cases}$ (P): $y+4z+15=0$.

c. d: $\begin{cases}x=5-2t\\ y=1-5t\\ z=4t.\end{cases}$ (P): $3x+2y+4z-17=0$.

6. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng:

d: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$ trên mỗi mặt phẳng tọa độ.

7. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình:

d: $\begin{cases}x=2+2t\\ y=-1+3t;\\ z=1+5t\end{cases}$ (P): $2x+y+z+8=0$.

a. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P).

8. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình:

d: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$; (P) : $2x + z - 5 = 0$

a. Xác định tọa độ giao điểm A của d và mặt phẳng (P).

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với d.

9. Xét đường thẳng d_m có phương trình: d_m: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = 2 - m + (4 - m^2)t \\ z = m + t. \end{cases}$

Với giá trị nào của m đường thẳng d_m: cắt mp(Oxz); song song với mp(Oxz); nằm trên mp(Oxz)?

10. Xét đường thẳng d_m có phương trình: $\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0. \end{cases}$

a. Chứng tỏ rằng đường thẳng d_m luôn cắt mặt phẳng (Oxy) với mọi m.

b. Tìm tập hợp các giao điểm M của d_m và mặt phẳng (Oxy) khi m thay đổi.

Hướng dẫn

1. Câu A.

Đường thẳng d: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2;1;3)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (2;-1;-3)$

nên $\vec{n} = -\vec{u}$ hay $\vec{n}$ và $-\vec{u}$ cùng hướng suy ra $d \perp (P)$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - 3z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2. \\ z = 3 \end{cases}$

Vậy d vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (P) tại A (−1; −2; 3).

2. Câu A.

Cách 1:

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (1; -3; -2)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d: $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

$\vec{n}.\vec{u} = 1 + 3 - 4 = 0$ $(\vec{n} \perp \vec{u})$

Thế tọa độ điểm A (3; –1; 0) $\in$ d vào phương trình mặt phẳng (P):
ta có: $3 + 3 - 7 \neq 0$ suy ra A $\notin$ (P). Vậy d // (P).

Cách 2:

Thế tọa độ x, y, z của đường thẳng d vào phương trình của mặt phẳng (P) ta được: $3 + t - 3(-1 - t) - 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow 0.t - 1 = 0$.

$\Leftrightarrow -1 = 0$ hay phương trình vô nghiệm. Vậy d // (P).

3. Câu B.

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 9 + 8t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

Thế tọa độ x, y, z vào phương trình mặt phẳng (P):

$(9 + 8t) + 2(1 + 2t) - 4(3 + 3t) + 1 = 0$.

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô số nghiệm hay d $\subset$ (P).

4. Câu B.

Phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 5t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$

Thế vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$1 - t - 3(-2 + 5t) - 4m^2(2 - 4t) + m = 0$

$\Leftrightarrow 16(m^2 - 1)t + (-8m^2 + m + 7) = 0 \qquad (*)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm đúng với mọi t $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -8m^2 + m + 7 = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được m = 1

Vậy khi m = 1, ta có đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P).

5. a. *Cách 1:* Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;\ 1;\ 4)$; mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -1;\ 2)$. Vì $\vec{u}.\vec{n} = 22 \neq 0$ nên $\vec{u}$ và $\vec{n}$ không vuông góc với nhau, và do đó d và (P) cắt nhau.

Cách 2: Phương trình đường thẳng d viết dưới dạng tham số:

d: $\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$

Thay giá trị x, y, z trong phương trình của d vào phương trình của mặt phẳng (P) ta được: $3(7 + 5t) - (1+t) + 2(5 + 4t) - 5 = 0$ hay $t = -1$.

Vậy d cắt mặt phẳng (P) tại điểm (2; 0; 1).

b. Xét hệ gồm các phương trình của d và (α):

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \\ y + 4z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 4z - 20 = 0 \\ y + 4z + 15 = 0 \end{cases}$$

hệ phương trình này vô nghiệm. Suy ra d // (P).

c. Thay các giá trị x, y, z trong phương trình của d vào phương trình của (P) ta được: $3(5 - 2t) + 2(1 - 5t) + 4(4t) - 17 = 0$ hay $0.t = 0$; phương trình có nghiệm tùy ý. Vậy đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P).

6. Đường thẳng d có phương trình tổng quát là: $\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 & (1) \\ 5x - 2z - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

Các phương trình (1) và (2) là phương trình tổng quát của hai mặt phẳng (α) và (β) cùng đi qua d. Trong phương trình (1) vắng mặt ẩn số z nên (α) là mặt phẳng đi qua d và song song với Oz. Do đó giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (Oxy) chính là hình chiếu của d_1 của d trên mặt phẳng (Oxy). Vậy phương trình của d_1 là: $\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Tương tự:

Hình chiếu d_2 của d lên mặt phẳng (Oxz) là: $\begin{cases} 5x - 2z - 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Hình chiếu d_3 của d trên mặt phẳng (Oyz) là: $\begin{cases} 5y - 3z - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

7. a. Thay các giá trị x, y, z trong phương trình của đường thẳng d vào phương trình của mặt phẳng (P), ta được:

$2(2 + 2t) + (-1 + 3t) + (1 + 5t) + 8 = 0$, suy ra $t = -1$.

Vậy tọa độ giao điểm của d và (P) là I(0; –4; –4)

b. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (P) thì hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (P) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Ta cần tìm phương trình mặt phẳng (Q).

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;\ 3;\ 5)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;\ 1;\ 1)$

Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}$ của mặt phẳng (Q) vuông góc với $\vec{u}$ và $\vec{n}$ nên

$\overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-2;\ 8; -4)$. Mặt khác mặt phẳng (Q) chứa d nên điểm I ∈ (Q). Phương trình mặt phẳng (Q) qua I và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}$ là:

$-2(x - 0) + 8(y + 4) - 4(z + 4) = 0$ hay $-x + 4y - 2z + 8 = 0$

Vậy phương trình hình chiếu d' của d: $\begin{cases} 2x + y + z + 8 = 0 \\ -x + 4y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$.

8. a. Giải hệ gồm các phương trình của d và mặt phẳng (P):

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases}$ ta được tọa độ giao điểm A(1; 2; 3).

b. Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1;\ 2;\ 2)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d thì mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nên phương trình của mặt phẳng (Q) là:

$1(x - 1) + 2(y - 2) + 2(z - 3) = 0$ hay $x + 2y + 2z - 11 = 0$.

Đường thẳng d' đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d chính là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

Vậy phương trình của đường thẳng d' là: $\begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ x + 2y + 2z - 11 = 0 \end{cases}$.

9. *Cách 1:* Phương trình mặt phẳng (Oxz) là y = 0. Kết hợp với phương trình của d_m ta được: $2 - m + (4 - m^2)t = 0$ (*)

- Nếu $4 - m^2 \neq 0$, tức là $m \neq \pm 2$: phương trình (*) có nghiệm duy nhất, và do đó d_m cắt mặt phẳng (Oxz).
- Nếu m = 2 thì (*) có nghiệm tùy ý, do đó d_2 nằm trên mp(Oxz).
- Nếu $m \neq -2$ thì (*) vô nghiệm, do đó d_2 song song với mp(Oxz).

Cách 2: Đường thẳng d_m đi qua điểm $I_m(1;\ 2-m;\ m)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m;\ 4 - m^2;\ 1)$; mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = (0;\ 1;\ 0)$. Đường thẳng d_m cắt mặt phẳng (Oxz) khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_m}.\vec{n} \neq 0$, tức là $4 - m^2 \neq 0$ hay $m \neq \pm 2$.

Khi m = 2 đường thẳng d_2 đi qua điểm $I_2(1;\ 0;\ 2)$ thuộc mặt phẳng (Oxz), do đó đường thẳng d_2 nằm trên mặt phẳng (Oxz).

Khi m = –2, đường thẳng d_{-2} đi qua điểm $I_{-2}(1;\ 4;\ -2)$ không thuộc mặt phẳng (Oxz) nên d_2 song song với mặt (Oxz).

10. a. Xét hệ gồm các phương trình của d_m và mặt phẳng (Oxy):

$$\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y - 1 = 0 \\ x - my - m = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Hệ luôn có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{2m}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} \\ z = 0 \end{cases}$ Với $\forall m$

Vậy đường thẳng d_m luôn cắt mặt phẳng (Oxy) với mọi m.

b. Giao điểm M của d_m và mặt phẳng (Oxy) có tọa độ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4m^2}{(1 + m^2)^2} \\ y^2 = \dfrac{(1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Cộng 2 vế của phương trình đầu ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{4m^2 + (1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy M nằm trên đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 trong mặt phẳng (Oxy).

Dạng 3: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Vị trí tương đối của đường thẳng d (đi qua M_0 và cóvectơ chỉ phương $\vec{u}$) với đường thẳng d' (đi qua M_0' và có vtcp $\vec{u'}$) xảy ra một trong các trường hợp sau:

+ d và d' cùng nằm trong một mặt phẳng ⇔ $\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0$.

+ d và d' cắt nhau ⇔ $\begin{cases}\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0\\ \left[\vec{u},\vec{u'}\right] \neq \vec{0}\end{cases}$.

+ d // d' ⇔ $\begin{cases}\left[\vec{u}.\vec{u'}\right] \neq \vec{0}\\ \left[\vec{u},\overrightarrow{M_0M_0'}\right] \neq \vec{0}\end{cases}$

+ d ≡ d' ⇔ $\left[\vec{u}.\vec{u'}\right] = \left[\vec{u},\overrightarrow{M_0M_0'}\right] \neq \vec{0}$

+ d, d' chéo nhau ⇔ $\left[\vec{u}.\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

Khi giải bài tập, nếu biết phương trình của 2 đường thẳng d, d' ta cũng có thể xét vị trí tương đối giữa chúng bằng cách giải hệ phương trình để tìm giao điểm.

Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì d, d' cắt nhau.

Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì d ≡ d'.

Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì d, d' song song hoặc chéo nhau, lúc đó xét thêm vectơ chỉ phương của chúng, 2 đường thẳng chéo nhau thì 2 vectơ đó khác phương.

Bài tập vận dụng

1. Cho hai đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$ và d': $\frac{x-3}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{-1}$.

Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về quan hệ giữa d và d'?

A. Chéo nhau và vuông góc với nhau.

B. Chéo nhau và không vuông góc với nhau.

C. Cắt nhau và vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau và không vuông góc với nhau.

2. Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} 2x - y + z - 15 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về vị trí tương đối của d và d'?

A. Cắt nhau B. Song song với nhau

C. Trùng nhau D. Chéo nhau.

3. Cho hai đường thẳng d và d' có phương trình:

$d: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$; $d': \begin{cases} y + 7z + 7 = 0 \\ x - 4z - 4 = 0 \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về quan hệ giữa d và d'?

A. Cắt nhau B. Song song với nhau

C. Chéo nhau D. Trùng nhau.

4. Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2m - 1 + 4t \\ y = m - t \\ z = 4 - m + 2t \end{cases}$

Tùy theo giá trị của m, xác định vị trí tương đối của d và d'.

Sau đây là bài giải:

Bước 1: Đường thẳng d đi qua điểm M (–1; 4; 0) và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; -6; 3)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm M' (2m–1; m; 4–m) và có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (4; -1; 2)$.

Bước 2: Ta có: $\overrightarrow{MM'}$ (2m; m – 4; 4 – m)

$$\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \left(\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-9; 6; 21)$$

Từ đó tính được $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = -18m + 6(m - 4) + 21(4 - m) = -33m + 60$

Bước 3:

- Nếu $m \neq \frac{20}{11}$ thì d và d' chéo nhau.
- Nếu $m = \frac{20}{11}$ và do $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] \neq \vec{0}$ nên d và d' cắt nhau.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Đúng B. Sai từ bước 1

C. Sai từ bước 2 D. Sai ở bước 3

5. Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng d và d' cho bởi phương trình:

a. $d: \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$; $d': \begin{cases} x = 27 + 9t \\ y = 15 + 5t \\ z = t \end{cases}$

b. $d: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 4 - t \end{cases}$; $d': \begin{cases} x - 7y + 3z - 17 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

c. $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{-4}$; $d': \dfrac{x-7}{-6} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{x}{12}$

d. $d: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$; $d': \begin{cases} x - 2y - 2z + 9 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

6. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua M (0; 1; 1) vuông góc với đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và cắt đường thẳng

$d_2: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$.

7. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A(1; –1; 1) và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$; và $d_2: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

8. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình lần lượt là:

$d_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t; \\ z = 2 - t \end{cases}$ $d_2: \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases}$.

Viết phương trình đường vuông góc của d_1 và d_2.

9. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình:

$d_1: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t; \\ z = t \end{cases}$ $d_2: \begin{cases} x = -11 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$.

Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

10. Viết phương trình của đường thẳng song song với đường $d_1 \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + t \end{cases}$ và cắt cả 2 đường có phương trình:

$d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3}$; $\quad d_3 : \begin{cases} x - y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn

1. Câu B.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;\ 3;\ 4)$ và đi qua $M_0\ (1; -1; 3)$

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (6; -2; -1)$ và đi qua $M'_0(3; -1; -2)$. Ta có $\overrightarrow{M_0M'_0} = (2; 0; -5)$; $\left[\vec{u}.\vec{u'}\right] = (5; 26; -22)$ do đó $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].M_0M'_0 = 120 \neq 0$ nên d và d' chéo nhau.

Mặt khác $\vec{u}.\vec{u'} = 12 - 6 - 4 = 2 \neq 0$ nên d và d' không vuông góc.

Vậy d và d' chéo nhau và không vuông góc với nhau.

2. Câu A.

Thay các giá trị x, y, z ở phương trình của d' vào phương trình của d ta được: $\begin{cases} 2(1-t) - (2+2t) + 3 - 15 = 0 \\ (1-t) + 2 + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 3 = 0 \\ t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -3$

Vậy d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ (4, –4, 3).

3. Câu D.

Cách 1: Giải hệ phương trình ta có:

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 & (1) \\ x + y + 3z + 3 = 0 & (2) \\ y + 7z + 7 = 0 & (3) \\ x - 4z - 4 = 0 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 7z - 7 = 0 \\ x - 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

(Lấy (1) – (2) ta được (4); 2.(2) – (1) ta được (3))

Vậy d trùng d'.

Cách 2:

Viết phương trình đường thẳng d' dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = -7 - 7t \\ z = t \end{cases}$.

Thay các giá trị x, y, z của phương trình đường thẳng d' vào phương trình đường thẳng d ta được:

$$\begin{cases} 2(4 + 4t) + (-7 - 7t) - t - 1 = 0 \\ 4 + 4t + (-7 - 7t) + 3t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0t + 0 = 0 \\ 0t + 0 = 0 \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm tùy ý $\Rightarrow$ d trùng d'.

Cách 3:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4; -7; 1)$$

Đường thẳng d'có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (4; -7; 1)$

Lấy điểm $M(0; 0; -1) \in d$, $M'(4; -7; 0) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (4; -7; 1)$

Ta thấy vectơ $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ cùng phương; $\vec{u}$ và $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương.

$\Rightarrow$ d trùng d'.

4. Câu A.

5. a. Đường thẳng d đi qua M(0; 0; –3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (9; 5; 1)$.

Đường thẳng d' đi qua M'(27;15; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (9; 5; 1)$.

Như vậy d và d' có cùng vectơ chỉ phương ngoài ra điểm M nằm trên d và nằm trên d' nên ta có d trùng d'.

b. Đường thẳng d qua M(–2; –1; 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 0; -1)$.

Phương trình đường thẳng d' viết dưới dạng tham số.

(bằng cách cho y = t) là: $\begin{cases} x = 11 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Vậy d' đi qua M'(11; 0; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (1; 1; 2)$.

Từ đó ta có: $\overrightarrow{MM'} = (13; 1; -2)$; $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (1; -7; 3) \neq \vec{0}$

Và $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = 0$ nên d cắt d'.

c. Đường thẳng d qua M(2; 0; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -3; -4)$. Đường thẳng d' qua M'(7; 2; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (-6;\ 9;\ 12)$. Do $\vec{u'} = -3\vec{u}$ nên $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ cùng phương, ngoài ra vì điểm M nằm trên d nhưng không nằm trên d' nên ta có d // d'.

d. Đường thẳng d viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$.

d đi qua M(2; 1; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; -1;\ 1)$.

Đường thẳng d' viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = -11 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$.

d' đi qua M' (–11; –1; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (4;\ 1;\ 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = (-13; -2;\ 0)$; $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (-2;\ 4;\ 4)$

và $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = 18 \neq 0$. Nên d và d' chéo nhau.

6. Lập phương trình mp(P) đi qua M(0; 1; 1) và vuông góc với d_1.

Do đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;\ 1;\ 1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là: $3(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0$

Tọa độ giao điểm H của d_2 và mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$. Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ hay

H (–1; 2; 3). Đường thẳng d đi qua M và nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MH} = (-1;\ 1;\ 2)$ nên có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 1}{2}$.

hay có phương trình tổng quát là: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$.

7. Ta có: $A \notin d_1$; $A \notin d_2$.

Đường thẳng d_2 có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

Cách 1:

Đường thẳng d cần tìm là giao điểm của mặt phẳng (A, d_1) và mặt phẳng (A, d_2). d_1 đi qua M(1; 0; 3) và có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{u_1} = (2;\ 1; -1)$. Mặt phẳng (A, d_1) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ phải vuông góc với $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{AM}\right]$ do $\overrightarrow{AM} = (0;\ 1;\ 2)$ nên

$\overrightarrow{n_1} = (3; -4;\ 2)$. Vậy mặt phẳng (A, d_1) có phương trình:

$3(x-1) - 4(y+1) + 2(z-1) = 0$ hay $3x - 4y + 2z - 9 = 0$.

Đường thẳng d_2 đi qua N(–2; 3; 0) và có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{u_2} = (1; -2;\ 1)$. Mặt phẳng (A, d_2) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}$ phải vuông góc với $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{AN}$ nên $\overrightarrow{n_2} = (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{AN})$; do $\overrightarrow{AN} = (-3;\ 4; -1)$ nên

$\overrightarrow{n_2} = (-2; -2; -2)$. Vậy mặt phẳng (A, d_2) có phương trình:

$1(x-1) + 1(y+1) + 1(z-1) = 0$ hay $x + y + z - 1 = 0$.

Phương trình đường thẳng d cần tìm là: $\begin{cases} 3x - 4y + 2z - 9 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Lưu ý: $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{u_2} = 3 + 8 + 2 = 13 \neq 0$ nên d_2 cắt mặt phẳng (A, d_1) và do đó d_2 cắt d. Tương tự vì $\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{u_1} = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$ nên d_1 cắt mặt phẳng (A, d_2) và do đó d_1 cắt d. Vậy d là đường thẳng qua A cắt cả d_1 và d_2.

Cách 2:

Làm như cách 1, ta viết được phương trình mặt phẳng (A, d_1) là:

$3x - 4y + 2z - 9 = 0$.

Ta tìm giao điểm B của đường thẳng d_2 với mặt phẳng (A, d_1) bằng cách giải hệ phương trình:

$\begin{cases} 3x - 4y + 2z - 9 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ ta được giao điểm $B\left(\frac{1}{3}; -\frac{15}{13};\ \frac{27}{13}\right)$.

Khi đó d là đường thẳng đi qua A và có một vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{12}{13};\ \frac{-2}{13};\ \frac{14}{13}\right)$. Ta lấy vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (6;\ 1; -7)$.

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$.

Cách 3: Ta có: $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$; $\quad d_2 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

Lấy điểm $M \in d_1$ và $M' \in d_2$.

Khi đó $M(1 + 2t; t; 3 - t)$ và $M'(-2 + t'; 3 - 2t'; t')$.

Ta tìm giá trị của t và t' sao cho điểm $A(1; -1; 1)$ nằm trên đường MM'tức là $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (2t;\ 1 + t;\ 2 - t)$; $\overrightarrow{AM} = (-3 + t';\ 4 - 2t';\ -1 + t')$

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1+t & 2-t \\ 4-2t' & -1+t' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2-t & 2t \\ -1+t' & -3+t' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2t & 1+t \\ -3+t' & 4-2t' \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-9 + 3t + 5t' - tt'; -6 + 5t + 2t' - 3tt'; 3 + 11t - t' - 5tt')$$

Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right] = \vec{0} \text{ hay } \begin{cases} -9 + 3t + 5t' - tt' = 0 \\ -6 + 5t + 2t' - 3tt' = 0 \\ 3 + 11t - t' - 5tt' = 0 \end{cases}$$

Khử t, t' từ các phương trình trên ta được: $\begin{cases} 21 - 4t - 13t' = 0 \\ 48 - 4t - 26t' = 0 \end{cases}$

Suy ra $t = -\dfrac{3}{2};\quad t' = \dfrac{27}{13} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-3; -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{7}{2})$.

Đường thẳng d qua A và M (và do đó qua cả M') có vectơ chỉ phương

$$2\overrightarrow{AM} = (-6; -1; 7) \text{ là: } \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 7t \end{cases}.$$

8. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (3; -2; -1)$

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{u_2}\ \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-4; -6;\ 10) \text{ chọn } \overrightarrow{u_2} = (2;\ 3; -5)$$

Gọi d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2, khi đó một vectơ chỉ phương của d là:

$\begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{a} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (13;\ 13;\ 13)$

chọn $\vec{a} = (1;\ 1;\ 1)$. Đường vuông góc chung d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) ở đây:

- (P) là mp chứa d và d_1 và (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ thỏa

$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left[\vec{a}, \overrightarrow{u_1}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (1;\ 4; -5)$

Lấy điểm A $(-1; -3; 2) \in d_1$, phương trình mặt phẳng (P) là:

$1(x + 1) + 4(y + 3) - 5(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 5z + 23 = 0.$

- (Q) là mặt phẳng chứa d và d_2 có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}$

thỏa: $\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = \left[\vec{a}, \overrightarrow{u_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right)$

$= (-8;\ 7;\ 1)$

Lấy điểm B $(2; -1; 1) \in d_2$; phương trình mặt phẳng (Q) là:

$-8(x - 2) + 7(y + 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow -8x + 7y + z + 2 = 0.$

Vậy phương trình đường vuông góc chung là:

$\begin{cases} x + 4y - 5z + 23 = 0 \\ -8x + 7y + z + 22 = 0 \end{cases}.$

9. *Cách 1*: Ta có thể làm như bài tập 8.

Cách 2: Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (0; -1;\ 1)$

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (4;\ 1;\ 1)$

Lấy điểm $A \in d_1$, khi đó $A(2;\ 1 - t;\ t)$

Lấy điểm $B \in d_2$, khi đó $B(-11 + 4t'; -1 - t'; t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-13 + 4t';\ -2 + t' + t;\ t' - t).$

AB là đoạn vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1(-2 + t' + t) + 1.(t' - t) = 0 \\ 4(-13 + 4t') + 1.(-2 + t' + t) + 1(t' - t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 3 \end{cases}$

Với $t = 1$ ta được $A(2;\ 0;\ 1)$; $t' = 3$ ta được $B(1;\ 2;\ 3)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 2;\ 2)$

Phương trình đường vuông góc chung AB qua A có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ là:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

10. Đường thẳng d cần tìm là giao của 2 mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) trong đó:

(P) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1

(Q) là mặt phẳng chứa d_3 và song song với d_1

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (3; -1;\ 1)$

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1;\ 4;\ 3)$

Đường thẳng d_3 có vectơ chỉ phương:

$\overrightarrow{u_3} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5;\ 9;\ 1)$ suy ra

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-7; -8;\ 13)$

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}\right] = (-10;\ 2;\ 32)$

Chọn $\overrightarrow{n_2} = (5; -1; -16)$

Phương trình mặt phẳng (P): $-7(x - 1) - 8(y + 2) + 13(z - 2) = 0$

Hay $7x + 8y - 13z + 35 = 0$

Phương trình mặt phẳng (Q): $5(x + 4) - 1(y + 7) - 16(z - 0) = 0$

Hay $5x - y - 16z + 13 = 0$

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} 7x + 8y - 13z + 35 = 0 \\ 5x - y - 16z + 13 = 0 \end{cases}$.

Dạng 4: Các bài toán về khoảng cách, góc

- *Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d.*

  Cách 1:

  - Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với đường thẳng d.
  - Tìm tọa độ giao điểm H của đường thẳng d và mặt phẳng (P).
  - Tính độ dài MH, đó là khoảng cách từ M tới đường thẳng d.

Cách 2:

- Lấy điểm M0 ∈ d và vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của d. Gọi U ∈ d sao cho $\overrightarrow{M_0U} = \vec{u}$ thì diện tích S của hình bình hành có 2 cạnh M_0M và M_0U là: $S = \left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0U}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|$.
- Khoảng cách MH là chiều cao của hình bình hành ứng với cạnh M_0U nên ta có: $MH = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*

Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2.
- Khoảng cách giữa đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 bằng khoảng cách từ đường thẳng d_2 tới (P) và cũng bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý của d_2 tới (P).

Cách 2:

- Lấy các điểm U_1 và U_2 sao cho $\overrightarrow{M_1U_1} = \overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{M_2U_2} = \overrightarrow{u_2}$. Xét hình hộp có ba cạnh M_1U_1, M_2U_2, M_1M_2 thì ta có thể tích V của nó là:

$$V = \left|\left[\overrightarrow{M_1U_1}, \overrightarrow{M_2U_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|$$

- Coi M_1M_2 là cạnh bên của hình hộp đó thì diện tích mặt đáy của hình hộp là $S = \left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|$.
- Chiều cao của hình hộp chính là khoảng cách giữa hai đường d_1 và d_2, vậy ta có: $h = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}$

Cách 3:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d_1 và song song với d_2.
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua d_2 và song song với d_1.
- Khoảng cách giữa d_1 và d_1 chính bằng khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song (P) và (Q) và bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Bài tập vận dụng

1. Cho đường thẳng d: $\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và điểm A(4; –3; 2). Tính khoảng cách từ A đến d.

Sau đây là bài giải:

Bước 1: Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;2;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d, nên mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n}$, phương trình mặt phẳng (P) là:

$3(x-4)+2(y+3)-1(z-2)=0$

hay $3x+2y-z-4=0$

Bước 2: Đường thẳng d viết dưới dạng tham số: $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=-2-2t \\ z=t \end{cases}$

Thay các giá trị x, y, z của phương trình đường thẳng d vào mặt phẳng (P) ta được: $3(-2-3t)+2(-2-2t)-t-4=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Bước 3: Tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (P) là H(1; 0; 1) và khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d là:

$AH=\sqrt{(1-4)^2+(0+3)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{3}$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Bước 1 B. Sai từ bước 1

C. Sai từ bước 2 D. Sai ở bước 3.

2. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=-2-t \\ y=2t \\ z=1+2t \end{cases}$ và điểm A(4; –3; –2). Tìm khoảng cách ngắn nhất từ A đến d và tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d.Sau đây là bài giải:

Bước 1: Lấy điểm $M(-2-t;2t;1+2t)\in d$

Ta có: $AM=\sqrt{(6+t)^2+(-3-2t)^2+(-3-2t)^2}$

$=\sqrt{9t^2+36t+54}=\sqrt{9(t+2)^2+18}\geq\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Bước 2: AM ngắn nhất = $3\sqrt{2}$ khi $t=-2$

Bước 3: AM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AM vuông góc d ($t=-2$)

Vậy tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên d là (0; –4; –3)

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Đúng B. Sai từ bước 1

C. Sai từ bước 2 D. Sai ở bước 3.

3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{4}{3}$.

4. Góc giữa đường thẳng d: $\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$

bằng:

A. 45° B. 60° C. 30° D. 0°.

5. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1: $\begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$.

6. Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình cho bởi:

a. $d_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$

b. $d_1: \begin{cases} x = 9t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 + t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

7. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a. d: $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$; (P): $2x + y + z - 1 = 0$

b. d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 \end{cases}$; (P): $-x + 3y - 5 = 0$.

8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB', CD và A'D'.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'D.

b. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C'N.

c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (PAI) và (DCC'D') (I là tâm của đáy ABCD).

9. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng ABCD và SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD.

a. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCM).

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CN.

c. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

d. Tính tỉ số thể tích hai phần hình chóp S.ABCD chia bởi mặt phẳng (BCM).

10. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng d_1 và d_2:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5};\quad d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+4}{-1}$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d_1 và song song với d_2.

b. Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

c. Viết phương trình đường vuông góc của d_1 và d_2.

Hướng dẫn

1. Câu A.

2. Câu A.

3. Câu C.

Vec tơ chỉ phương của d và d' lần lượt là $\vec{u} = (2;\ 1;\ 0)$ và $\vec{u'} = (0;\ 1; -1)$

$\Rightarrow \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (-1;\ 2;\ 2)$

M(2; –1; 1) ∈ d và M'(1; 1; 3) ∈ d' $\Rightarrow \overrightarrow{MM'}(-1;\ 2;\ 2)$

Vậy $d(d, d') = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|} = \dfrac{|1+4+4|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$.

4. Câu C.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;\ 1;\ 1)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;\ 2; -1)$

Gọi φ là góc hợp bởi d và mp (P) thì:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0.$$

5. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (8;\ 4;\ 1)$ và qua M(–23; –10; 0).

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (2; -2;\ 1)$ và qua M'(3; –2; 0). Ta có: $[\vec{u}, \vec{u'}] = (6; -6; -24)$ và $\overrightarrow{MM'} = (26;\ 8;\ 0)$

$$\text{Vậy } d(d_1, d_2) = \frac{|[\vec{u},.].\overrightarrow{MM'}|}{|[\vec{u}, \vec{u'}]|} = \frac{|6.26 - 6.8 + 0|}{\sqrt{36+36+576}} = \frac{108}{\sqrt{648}} = 3\sqrt{2}.$$

6. a. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (1; -1;\ 2)$

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (1;\ 2; -1)$

Gọi φ là góc hợp bởi d_1 và d_2 $0^0 \le \varphi \le 90^0$ ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u_1}.\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|} = \frac{|1-2-2|}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy góc $\varphi = 60^0$.

b. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (9;\ 5;\ 1)$

Đường thẳng d_2 có phương tình tham số (bằng cách cho z = t) là:

$\begin{cases} x = 29 + 9t \\ y = 15 + 15t \\ z = t \end{cases}$ và do đó có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (9;\ 5;\ 1)$.

Hai đường thẳng d_1 và d_2 có cùng vectơ chỉ phương nên góc hợp bởi hai đường thẳng bằng 0^0.

7. a. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;\ 2; -1)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;\ 1;\ 1)$

Gọi φ là góc hợp bởi d và (P) thì $0^0 \le \varphi \le 90^0$ và

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0.$$

b. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1;\ 0)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(-1;\ 3;\ 0)$

Gọi φ là góc hợp bởi giữa d và (P) thì $0^0 \le \varphi \le 90^0$ và

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|-2-3|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{1+9}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng d và (P) là 45^0.

8. a. Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc tọa độ là A, trục Ox chứa AB, trục Oy chứa AD và Oz chứ AA'.

⇒ A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1)

C(1; 1; 0), B'(1; 0; 1), C'(1; 1; 1), D'(0; 1; 1)

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (1;\ 0; -1)$, $\overrightarrow{B'D} = (-1;\ 1; -1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\ \overrightarrow{B'D}\right] = (1;\ 2;\ 1)$, $\overrightarrow{A'B'} = (1;\ 0;\ 0)$

$$\Rightarrow d(A'B, B'D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\ \overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\ \overrightarrow{B'D}\right]\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

b. Ta có: $M(1;\ 0;\ \frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2};\ 1;\ 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}(-1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{NC'}(\frac{1}{2};\ 0;\ 1) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = 0 \Rightarrow$ $MP \perp NC'$ hay góc giữa hai đường thẳng là 90°.

c. Mặt phẳng (PAI) có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$$

Mặt phẳng (DCC'D') có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AD} = (0;\ 1;\ 0)$

Góc φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng trên

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{AD}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{AD}|} = \frac{2}{3} \Rightarrow\ \varphi \approx 48^0 11'.$$

9. Chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc O là điểm A, trục hoành chứa AB, trục tung chứa AD và trục cao chứa SA.

$\Rightarrow A(0;\ 0;\ 0)$, $B(a;\ 0;\ 0)$, $C(a;\ a;\ 0)$, $D(0;\ a;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ 2a)$ $M(0;\ 0;\ a)$,

$N(0;\ \frac{a}{2};\ a)$

a. $\overrightarrow{BC} = (0;\ a;\ 0)$; $\overrightarrow{BM} = (-a;\ 0;\ a)$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(BCM)} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & -a \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (a^2;\ 0;\ a^2) = a^2(1;\ 0;\ 1).$$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (BCM) là:

$1(x - a) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + z - a = 0$

$$\Rightarrow d(A, (BCM)) = \frac{|-a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ta lại có: $\overrightarrow{BS} = (-a;\ 0;\ 2a)$, $\overrightarrow{CN} = (-a; -\frac{a}{2};\ a)$, $\overrightarrow{SC}(a;\ a; -2a)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2a \\ -\frac{a}{2} & a \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2a & -a \\ a & -a \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}\right) = \left(a^2;\ -a^2;\ \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{SC} = a^3 - a^3 - a^3 = -a^3$$

$$\Rightarrow d(SB, CN) = \frac{|-a^3|}{\sqrt{a^4 + a^4 + \frac{a^4}{4}}} = \frac{a^3}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{2a}{3}.$$

b. Ta có: $\vec{n}_{(SCD)} = (0;\ 2a^2;\ a^2) = a^2(0;\ 2;\ 1)$

$\vec{n}_{(SBC)} = (-2a^2;\ 0;\ -a^2) = a^2(-2;\ 0;\ -1)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC), ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|-1|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{1}{5}.$$

c. $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2.2a = \frac{2}{3}a^3$, vì M là trung điểm của SA

Suy ra: $d(S, (BCM)) = d(A, (BCM)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Hình chóp S.ABCD bị mp(BCM) chia thành 2 phần, trong đó có một phần là hình chóp S.BCNM, hình chóp này có đường cao bằng d(S, (BCM)) = $\frac{a}{\sqrt{2}}$ và đáy là hình thang BCNM có diện tích là:

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)a\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.$$

Suy ra: $V_{S.BCNM}=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a^3}{4}$.

Vậy tỉ số thể tích 2 phần hình chóp S.ABCD chia bởi mặt phẳng (BCM) là:

$$\frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{2a^3}{3}-\frac{a^3}{4}}=\frac{3}{5}.$$

10. a. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;\ 3;-5)$

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(3;-2;-1)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-13;-13;-13)$

Ta chọn $\vec{n}'(1;\ 1;\ 1)$. Lấy $M(2;\ 3;-4)\in d_1$, phương trình mặt phẳng (P) là:

$1(x-2)+1(y-3)+1(z+4)=0$ hay $x+y+z-1=0$.

b. $d(d_1, d_2)=d(N, (P))$ trong đó $N(-1;\ 4;-4)\in d_2$

Vậy $d(d_1, d_2)=\frac{|-1+4-4-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

c. Đường thẳng d_1 có phương trình tham số: $\begin{cases}x=2+2t\\y=3+3t\\z=4-5t\end{cases}$.

Đường thẳng d_2 có phương trình tham số: $\begin{cases}x=-1+3t'\\y=4-2t'\\z=4-t'\end{cases}$.

Lấy điểm $A\in d_1\Leftrightarrow A(2+2t;\ 3+3t;\ -4-5t)$

$B\in d_2\Leftrightarrow B(-1+3t';\ 4-2t';\ 4-t')$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-3+3t'-2t;\ 1-2t'-3t;\ 8-t'+5t)$.

AB là đường vuông góc chung của d và d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3 + 3t' - 2t) + 3(1 - 2t' - 3t) - (8 - t' + 5t) = 0 \\ 3(-3 + 3t' - 2t - 2(1 - 2t' - 3t) - 1(8 - t' + 5t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -43 + 5t' - 38t = 0 \\ -19 + 14t' - 5t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow A(0;\ 0;\ 1),\ B(2;\ 2;\ 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;\ 2;\ 2) = 2(1;\ 1;\ 1)$.

Vậy phương trình đường vuông góc chung d_1 và d_2 là:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho bốn điểm: A(6; –2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; –1), D(4; 1; 0).

a. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b. Tính thể tích tứ diện ABCD.

c. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Xác định tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu.

d. Viết phương trình đường tròn qua ba điểm A, B, C. Hãy tìm tọa độ tâm và bán kính của nó.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$d_1 : \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$ $\qquad d_2 : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

a. Viết phương trình các mặt phẳng P_1, P_2 lần lượt đi qua d_1, d_2 và song song với nhau.

b. Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

c. Viết phương trình đường thẳng d song song với Oz, cắt d_1, d_2.

3. Trong không gian tọa độ Oxyz cho A(1; 2; –1), B(–1; 1; 1), C(1; 0; 1).

a. Chứng minh OABC là một tứ diện vuông đỉnh O.

b. Chứng minh ngoài điểm O còn có một điểm S duy nhất sao cho SABC là tứ diện vuông đỉnh S. Tìm tọa độ S.

c. Tam giác ABC bị mặt phẳng (Oxy) chia thành hai phần, tính tỉ số diện tích hai phần đó.

d. Tìm góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (Oxy).

4. Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ và hai đường thẳng:

$$d : \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}, \qquad d' : \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 8 \end{cases}$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và vuông góc với đường thẳng d.

b. Viết phương trình mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng d, d'.

5. Trong không gian tọa độ Oxyz, xét mặt phẳng

(α_m): $3mx + 5\sqrt{1-m^2}\,y + 4mz + 20 = 0$, $m \in [-1; 1]$.

a. Tính khoảng cách từ gốc O tới (α_m).

b. Chứng minh với mọi $m \in [-1; 1]$, (α_m) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

c. Với giá trị nào của m, hai mặt phẳng (αm) và (Oxz) cắt nhau? Khi m thay đổi, chứng minh rằng các giao tuyến đó song song hoặc trùng nhau.

6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad d' : \begin{cases} 3y - z - 7 = 0 \\ 3x + 3y - 2z - 17 = 0 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng d và d' chéo nhau và vuông góc nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua d' và vuông góc với d. Tìm tọa độ giao điểm H của d và mặt phẳng (P).

c. Mặt phẳng (Q) thay đổi, luôn song song với mặt phẳng (Oxy), cắt d, d' lần lượt tại M, M'. Tìm quỹ tích trung điểm I của MM'.

7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, xét đường d_m có phương trình:

$$\begin{cases} mx + y - mz - 1 = 0 \\ x - my + z - m = 0 \end{cases}$$

a. Chứng minh góc giữa d_m và trục Oz không đổi; khoảng cách giữa d_m và Oz không đổi.

b. Tìm tập hợp các giao điểm M của d_m và mặt phẳng (Oxy) khi m thay đổi.

8. a. Cho hai điểm A(3; 1; 0), B(–9; 4; 9) và mặt phẳng (α):

$2x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (α) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

b. Cho hai điểm A(3; 1; 1), B(7; 3; 9) và mặt phẳng (α): $x + y + z + 3 = 0$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (α) để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

9. Cho Δ ABC vuông tại A có AB = a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = 3a. AD là đường cao Δ ABC. E, F là trung điểm của SB, SC. H là hình chiếu của A trên EF.

1. Chứng minh H là trung điểm của SD.
2. Tính cosin góc CP giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACF).
3. Tính thể tích hình chóp A.BCFE.

10. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. AC = 2OB, BC = 2OA. Vẽ OM $\perp$ AC tại M, ON $\perp$ BC tại N.

1. Chứng minh MN $\perp$ OC.
2. Tính $\cos \widehat{MON}$.
3. D là trung điểm AB. Chứng minh $\dfrac{tg^4\widehat{OCD}}{tg^4\widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = 1$.

11. Cho Δ ABC đều cạnh a. Trên đường thẳng d $\perp$ (ABC) tại A lấy điểm S, SA = h.

1. Tính d (A, (SBC)) theo a và h.
2. Đường thẳng $\Delta \perp$ (SBC) tại trực tâm H của ΔSBC, chứng tỏ Δ luôn qua điểm cố định khi S di động trên d.Δ cắt d tại S'. Tính h theo a để SS' nhỏ nhất.

12. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, ΔSAB đều và (ABC)$\perp$(ABCD). H là trung điểm của AD.

1. Tính d (D, (SBC)), d(HC, SD).

2. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với SC tại I. Chứng tỏ mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SD và tính $[B, SC, D]$.

13. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, đường cao SH = 2a. M là điểm bất kì thuộc đoạn AH. Mặt phẳng (α) qua M song song với AD và SH cắt AB, DC, SD, SA lần lượt tại I, J, K, L.

1. Xác định vị trí M để thiết diện IJKL là tứ giác ngoại tiếp được.

2. Xác định vị trí M để thể tích khối đa diện DJKLH đạt được giá trị lớn nhất.

1. Mặt phẳng(α) cắt DB tại N. Gọi E = MK $\cap$ NL. P, Q là trung điểm AD, BC. Tìm M để $\widehat{PEQ} = 90$.

14. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $M_1(2; 1; 1)$, $M_2(3; 1; 2)$, $M_3(0; -1; -4)$.

1. Chứng minh rằng ba điểm M_1; M_2; M_3 không thẳng hàng, tính diện tích tam giác $M_1M_2M_3$.

2. Tính thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$.

3. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm M_1; M_2; M_3.

4. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm M_1 và vuông góc với đường thẳng M_2M_3.

5. Viết phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm M_1, M_2 và song song với đường thẳng OM_3.

15. Trong hệ toạ độ Oxyz cho điểm $M(1;2;3)$

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC.

2. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm P, R, Q sao cho M là trực tâm tam giác PRQ.

3. Viết phương trình mặt phẳng (γ) đi qua M cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm D, E, F sao cho tứ diện ODEF có thể tích bé nhất.

16. Trong hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(2; -1; 0)$ và $M_3(0; 0; 1)$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm M_1, M_2 mà khoảng cách từ M_3 đến (α) bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M_3 mà khoảng cách từ M_1 và M_2 tới (β) đều bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17. Trong hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt với phương trình tham số

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \qquad \Delta': \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

1. Chứng tỏ hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau.
2. Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ và Δ'.
3. Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'.

18. Trong hệ toạ độ Oxyz với mỗi số thực m xét đường thẳng Δ_m có phương trình:

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 & (1) \\ mx + y - mz - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

1. Tìm vectơ chỉ phương của Δ_m. Chứng minh rằng góc hợp bởi đường thẳng Δ_m và trục Oz không phụ thuộc vào m. Tìm giá trị của góc không đổi đó.
2. Khi m thay đổi, tìm quỹ tích giao điểm của đường thẳng Δ_m với các mặt phẳng toạ độ.
3. Chứng minh rằng khoảng cách giữa đường thẳng Δ_m và trục Oz không phụ thuộc vào m. Tính giá trị của khoảng cách đó.

19. Trong hệ toạ độ Oxyz cho hai điểm $M(1; 2; -2)$ và $N(2; 0; -2)$.

1. Viết phương trình tổng quát của các mặt phẳng đi qua M, N và lần lượt vuông góc với các mặt phẳng toạ độ.

2. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua M, N và vuông góc với mặt phẳng $3x + y + 2z - 1 = 0$.

20. Trong hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng đi qua $A = (3; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 7z - 1 = 0$.

21. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) biết phương trình đường thẳng $(d)\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và phương trình mặt phẳng (α) $3x + 5y - z - 2 = 0$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α)

22. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (d) và (d') biết

$$(d)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và } (d')\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$$

Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng (d) và (d') .

23. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (d) và (d') biết

$$(d)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và } (d')\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$$

Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng (d) và (d').

24. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng

$$(d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$$

$$(d') : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của (d) và (d') là:

25. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu

$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 2z - 4 = 0$ và mặt phẳng

$(\alpha) x + y - z - 10 = 0$. Xác định vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α).

26. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $(d): \frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}$ và điểm $A = (2;\ 1; -1)$. Xác định toạ độ hình chiếu của điểm A trên đường thẳng (d).

27. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x - 2y - 3z + 14 = 0$ và điểm $M = (1;\ -1;\ 1)$. Xác định toạ độ của điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (α).

28. Trong hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC với $O = (0;\ 0;\ 0)$, $A = (1;\ 0;\ 0)$, $B = (0;\ 1;\ 0)$, $C = (0;\ 0;\ 1)$

29. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho 3 điểm $A = (-1;\ 1;\ 2)$ $B = (3;\ -1;\ 0)$ $C = (2;\ 1;\ 1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với BC.

30. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $I = (5;\ 0;\ 0)$, $J = (0; -3;\ 0)$, $K = (0;\ 0; -5)$. Viết phương trình mặt phẳng (I J K).

31. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho $\vec{a} = (3; 0; -6)$, $\vec{b} = (2;\ -4; 0)$. Tích vô hướng của $\vec{a}.\vec{b}$ là:

A. 4 B. 8 C. 10 D. 6.

32. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho $A = (-1;\ 2;\ 1)$, $B = (1;\ 1;\ 1)$, $C = (0;\ 3;\ 2)$. Tích có hướng của $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ là:

A. $[\vec{a},\ \vec{b}] = (-2;\ 1;\ 5)$ B. $[\vec{a},\ \vec{b}] = (-1; -2;\ 3)$

C. $[\vec{a},\ \vec{b}] = (2;\ 1; -5)$ D. $[\vec{a},\ \vec{b}] = (2;\ 1;\ 5)$

33. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A = (1; 0; 0)$, $B = (0; 2; 0)$, $C = (2;\ 1;\ 3)$. Diện tích tam giác ABC là:

A. $S = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ B. $S = \frac{3\sqrt{6}}{5}$ C. $S = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ D. $S = \frac{3\sqrt{6}}{7}$.

34. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $(\Delta'')\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 2x-y+3z-4=0 \end{cases}$.

Véctơ chỉ phương của đường thẳng là:

A. $\vec{u}=(2;-5;-3)$ B. $\vec{u}=(2;5;-3)$

C. $\vec{u}=(2;\ 5;\ 3)$ D. $\vec{u}=(2;-5;\ 3)$.

35. Với đường thẳng (Δ'') đã cho ở câu 33. Phương trình đường thẳng song song với đường thẳng (Δ'') và qua $C=(1;\ 2;-1)$ là:

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+5t \\ z=-1-3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+5t \\ z=-1-3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-5t \\ z=-1-3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-5t \\ z=1-3t \end{cases}$.

36. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho đường tròn

$(C)\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+10=0 \\ x+2y-2z+1=0 \end{cases}$. Bán kính của đường tròn là:

A. $R=2$ B. $R=3$ C. $R=4$ D. $R=1$.

37. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho 2 mặt phẳng:

$(\alpha)\,2x-y+3z+1=0$, $(\alpha')\,x+y-z+5=0$ và điểm $M=(1;\ 0;\ 5)$

Khoảng cách MH từ điểm M đến giao tuyến 2 mặt phẳng (α) và (α') là:

A. $MH=\dfrac{9\sqrt{14}}{7}$ B. $MH=\sqrt{\dfrac{529}{19}}$

C. $MH=\dfrac{\sqrt{529}}{19}$ D. $MH=\dfrac{529}{\sqrt{19}}$.

38. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha)\,2x-y+3z+1=0$ và điểm $M=(1;\ 0;\ 5)$. Phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với (α) là:

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-t \\ z=5+3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=5+3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ D. Đáp số khác.

39. Trong hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A = (6; -2; 3)$, $B = (0; 1; 6)$, $C = (2; 0; 1)$, $D = (4; 1; 0)$. Thể tích khối tứ diện ABCD là:

A. V = 10 (đvtt) B. V = 11 (đvtt)

C. V = 9 (đvtt) D. V = 12 (đvtt).

40. Trong không gian Oxyz, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A = (2; 1; -2)$ và vuông góc với mặt phẳng $3x - 5y + 2z + 4 = 0$ là:

A. $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 5t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ D. Đáp số khác.

Hướng dẫn

1. $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; -4)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; 3; -3)$

a. A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}.(-2) + \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}.(3) + \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}.(-3)$

$= 36 - 108 + 0 = -72 \neq 0.$

b. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{|-72|}{6} = 12.$

c. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Phương tình của mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Điểm $A(6; -2; 3) \in (S) \Rightarrow 6^2 + (-2)^2 + 3^2 + 12a - 4b + 6c + d = 0.$

Điểm $B(0; 1; 6) \in (S) \Rightarrow 1^2 + 6^2 + 2b + 12c + d = 0.$

Điểm $C(2; 0; -1) \in (S) \Rightarrow 2^2 + (-1)^2 + 4a - 2c + d = 0$.

Điểm $D(4; 1; 0) \in (S) \Rightarrow 42 + 12 + 8a + 2b + d = 0$.

Từ trên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 12a - 4b + 6c + d = -49 \\ 2b + 12c + d = -37 \\ 4a - 2c + d = -5 \\ 8a + 2b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$$

Tham số t ứng với giao điểm I' của Δ và mặt phẳng (ABC) là nghiệm của phương trình: $(2 + t) + 2(-2 + 2t) - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

Vậy $I' = \left(\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}; 3\right)$. Đó chính là tâm của đường tròn (C).

Gọi r là bán kính của (C) thì: $r = \sqrt{R^2 - \pi'^2}$ (R là bán kính của (S)).

$$= \sqrt{17 - \left[\left(\frac{12}{5} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{5} + 1\right)^2 + (3 - 3)^2\right]} = \frac{\sqrt{405}}{5}.$$

2. a. d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\overrightarrow{n_1} = (1; 0; -8)$ và $\overrightarrow{n_2} = (0; 1; -4)$. Vậy d_1 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (8; 4; 1)$.

Tương tự, đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (2; -2; 1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1) và mặt phẳng (P_2) là:

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (6; -6; -24)$. Ta lấy $\overrightarrow{n'} = (1; -1; -4)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1) và mặt phẳng (P_2). Lấy điểm $M_1(-23; 10; 0) \in d_1$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (P_1) có phương trình:

$$(x + 23) - (y + 10) - 4z = 0 \text{ hay } x - y - 4z + 13 = 0$$

Lấy điểm $M_2(3; -2; 0) \in d_2 \Rightarrow$ mặt phẳng (P_2) có phương trình:

$$(x - 3) - (y + 2) - 4z = 0 \text{ hay } x - y - 4z - 5 = 0.$$

b. Khoảng cách h giữa d_1 và d_2 là khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc mặt phẳng (P_1) tới mặt phẳng (P_2). Lấy $M(0; 1; 3)$, ta có:

$$h = \frac{|-1 - 12 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{18}} = 3\sqrt{2}.$$

c. Khử z từ phương trình của d_1 ta được mặt phẳng (α) đi qua d_1 và song song với Oz, nên mặt phẳng (α) có phương trình: $x - 2y + 3 = 0$

Tương tự, mặt phẳng (β) đi qua d_2 và song song với Oz nên có phương trình là: $x + y - 1 = 0$. Dễ thấy giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) chính là đường thẳng d cần tìm: $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$.

3. a. $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(1;\ 2; -1) \\ \overrightarrow{OB}(-1;\ 1;\ 1) \\ \overrightarrow{OC}(1;\ 0;\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0 \\ \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ OA $\perp$ OB, OB $\perp$ OC, OC $\perp$ OA.

b. Giả sử S(x, y, z) là điểm thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ta có:

$\overrightarrow{SA}(1 - x;\ 2 - y;\ -1 - z)$, $\overrightarrow{SB}(-1 - x;\ 1 - y;\ 1 - z)$

$\overrightarrow{SC}(1 - x;\ -y;\ 1 - z)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3y = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array} \right.$

Khi $x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow$ điểm S trùng với điểm O.

Khi $x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = z = \dfrac{4}{3} \Rightarrow S(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{4}{3};\ \dfrac{4}{3})$ là điểm duy nhất khác O sao cho tứ diện SABCD là tứ diện vuông.

c. Gọi M, N là trung điểm của đoạn AB, AC

$\Rightarrow M\left(0;\ \dfrac{3}{2};\ 0\right)$, $N(1;\ 1;\ 0) \Rightarrow$ M, N đều thuộc mặt phẳng (Oxy).

Như vậy mặt phẳng (Oxy) cắt tam giác ABC theo đường trung bình MN, do đó chia tam giác ABC thành 2 phần: tam giác AMN và hình thang MNCB. Rõ ràng là tỉ số diện tích 2 phần đó là 1: 3.

d. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -1;\ 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2;\ 2)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;\ 4;\ 4)$; mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$. Gọi φ là góc hợp bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (Oxy) thì:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{4}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{2}{3}.$$

4. a. Ta có: vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (2; -3;\ 2)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với d, do đó phương trình của nó có dạng:
(P): $2x - 3y + 2z + D = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm I(5; –1; –13) và bán kính $R = \sqrt{308}$, vì vậy (P) tiếp xúc với (S) ⇔ $d(I, (D)) = \sqrt{308}$

$$\Leftrightarrow \frac{|10 + 3 - 26 + D|}{\sqrt{4+9+4}} = \sqrt{308}$$

$$\Leftrightarrow |D - 13| = \sqrt{17.308} \Rightarrow D = 13 \pm \sqrt{5236}.$$

Tóm lại, có hai mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu đầu bài:

$$2x - 3y + 2z + 13 \pm \sqrt{5236} = 0.$$

b. Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}(2; -3;\ 2)$.

Vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u'}(3; -2;\ 0)$.

Mặt phẳng (Q) cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (4;\ 6;\ 5)$.

Vì vậy phương trình của mặt phẳng (Q) là: $4x + 6y + 5z + D = 0$

Để mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S), điều kiện là:

$$d(I, (Q)) = \sqrt{308} \Leftrightarrow \frac{|20 - 6 - 65 + D|}{\sqrt{16+36+25}} = \sqrt{308}$$

$$\Leftrightarrow |D - 51| = \sqrt{23716} = 154 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = -103 \\ D = \ 205 \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng (Q) cần tìm:

$$\left[\begin{array}{l} 4x + 6y + 5z - 103 = 0 \\ 4x + 6y + 5z + 205 = 0 \end{array}\right..$$

5. a. $d(O, (\alpha_m)) = \dfrac{20}{\sqrt{9m^2 + 25(1 - m^2) + 16m^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = 4$.

b. Từ câu a, suy ra rằng: Khi m thay đổi, các mặt phẳng (α_m) luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm O và bán kính là 4.

c. Mặt phẳng (α_m) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3m;\ 5\sqrt{1-m^2};\ 4m)$, vì vậy mặt phẳng (α_m) cắt mặt phẳng (Oxz) với vectơ pháp tuyến $\vec{j} = (0;\ 1;\ 0)$ khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó giao tuyến Δ_m của mặt phẳng (α_m) và mặt phẳng (Oxz) là: $\begin{cases} 3mx + 4mz + 20 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

Vectơ chỉ phương của Δ_m là $\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4m \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4m & 3m \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3m & 0 \end{vmatrix} \right)$

$$= m(4;\ 0;\ -3)\ (m \neq 0).$$

hay lấy $\vec{u} = (4;\ 0;\ -3)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_m.

Vì vậy các giao tuyến Δ_m song song hoặc trùng nhau.

6. a. Đường thẳng d' là giao của hai mặt phẳng có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = (0;\ 3; -1)$ và $\vec{n'} = (3;\ 3;\ -2) \Rightarrow$ vectơ chỉ phương của đường thẳng d' $\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\vec{n'}, \vec{n}\right] = (3;\ 3;\ 0)$. Mặt khác vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của đường thẳng d là: $\overrightarrow{u_d} = (2;\ 1; -1)$ và $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_{d'}} = 0 \Rightarrow d \perp d'$

Ta chứng minh d, d' không có điểm chung (hệ phương trình lập ra từ phương trình hai đường thẳng vô nghiệm), chúng lại không song song. Vậy chúng chéo nhau.

b. Ta lấy một điểm I nào đó thuộc d'. Chẳng hạn cho $y = 0 \Rightarrow z = -7,\ x = 1$ $\Rightarrow I(1;\ 0;\ -7) \in d'$. Vì $d \perp d'$, nên mặt phẳng qua I và vuông góc với d sẽ đi qua d'. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:

$$2(x-1) + (y-0)\,(z+7) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 9 = 0.$$

Tọa độ giao điểm H của d và mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ 2x + y - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow H\left(\frac{13}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right).$$

c. Mặt phẳng (Q) // mặt phẳng (Oxy) nên có phương trình $z = m \quad (m \neq 0)$.

Tọa độ giao điểm M của d và mặt phẳng (Q) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M(5-2m;\ 1-m;\ m).$$

Tọa độ giao điểm M' của d' và (Q) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3y - z - 7 = 0 \\ 3x + 3y - 2z - 17 = 0 \\ z = m \end{cases} \Rightarrow M'\left(\frac{10+m}{3};\ \frac{7+m}{3};\ m\right).$$

I là trung điểm của MM' $\Rightarrow I\left(\frac{25-5m}{6};\ \frac{5-m}{3};\ m\right)$.

Vậy quỹ tích của I là đường thẳng có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = \dfrac{25-5m}{6} \\ y = \dfrac{5-m}{3} \\ z = m \end{cases} ;\quad m \in R.$$

7. a. Δ_m là giao của hai mặt phẳng đã cho với các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (m;\ 1;\ -m)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1;\ -m;\ 1)$. Vậy Δ_m có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_m} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (1 - m^2;\ -2m;\ -1 - m^2)$.

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$.

Vậy nếu gọi φ_m là góc tạo bởi Δ_m và Oz thì

$$\cos\varphi_m = \frac{\left|\overrightarrow{u_m}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u_m}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{1+m^2}{\sqrt{(1+m^2)^2 + 4m^2 + (1+m^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\varphi_m = 45^0$ (không đổi).

Khử z từ hệ phương trình của đường thẳng Δ_m ta được phương trình $2mx + (1 - m^2)y - 1 - m^2 = 0$ (không chứa z). Đây là phương trình mặt phẳng (α_m) chứa Δ_m và song song với trục Oz. Do đó khoảng cách giữa Δ_m và Oz bằng khoảng cách từ gốc $O(0;\ 0;\ 0) \in Oz$ tới mp(α_m). Vậy khoảng cách đó bằng:

$$d_m = \frac{\left|-1 - m^2\right|}{\sqrt{4m^2 + (1-m^2)^2}} = 1 \text{ (không đổi)}.$$

b. Tọa độ giao điểm M của Δ_m và mp(Oxy) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = m \\ z = 0 \end{cases}.$$

Bình phương hai vế của 2 phương trình đầu của hệ phương trình rồi cộng lại ta được: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Vậy M nằm trên đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 trong mặt phẳng tọa độ (Oxy).

8. Ta nhận thấy hai điểm A, B ở hai phía mặt phẳng (α).

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A(3; 1; 0) qua mặt phẳng (α): $2x - y + z + 1 = 0$ ta có:

$$|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B \text{ (không đổi).}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ A' nằm giữa hai điểm B, M $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của A'B với mặt phẳng (α).

Vậy bài toán được giải theo trình tự sau:

* Xác định điểm A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (α), ta có: A'(–1; 3; –2).

* Tìm giao điểm M của đường thẳng A'B với mặt phẳng (α)

Đường thẳng A'B có phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 11t. \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(7;\ 2; -13).$$

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất khi M(7; 2; –13).

b). Gọi I là trung điểm của đoạn AB $\Rightarrow$ I(5; 2; 5).

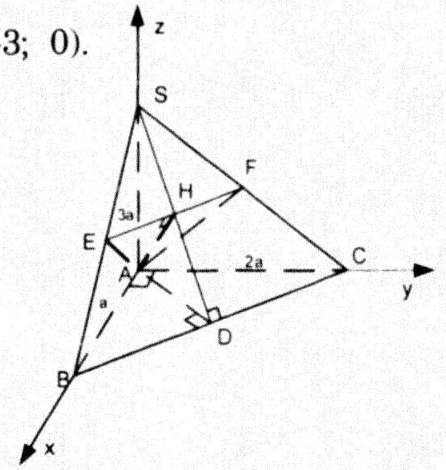
Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = 2MI.$

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất với I cố định và M $\in$ (α)

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α).

Tọa độ của M(x; y; z) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -5 \Rightarrow M(0; -3;\ 0).$$



9. Chọn hệ trục tọa độ Axyz, ta có:

A(0,0,0); B(a,0,0); C(0,2a,0); S(0,0,3a);

$E(\frac{a}{2}, 0, \frac{3a}{2})$; $F(0, a, \frac{3a}{2})$

1. Chứng minh H là trung điểm SD

Ta có: $\overrightarrow{FE} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right) = \frac{a}{2}(1; -2; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t \;\; (t \in R) \\ z = \dfrac{3a}{2} \end{cases}$$

$H \in (FE) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(t; a - 2t; \frac{3a}{2}\right)$

$\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{AH} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2}(1; -2; 0)\left(t; a - 2t; \frac{3a}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow t = \frac{2a}{5} \;\; \Rightarrow \;\; H\left(\frac{2a}{5}; \frac{a}{5}; \frac{3a}{2}\right)$. Do đó

$\overrightarrow{SH} = \left(\frac{2a}{5}; \frac{a}{5}; 0\right)$, $\overrightarrow{BC} = (-a; 2a; 0) \;\; \Rightarrow \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SH \perp BC \\ \text{mà } SD \perp BC \text{ (do } BC \perp AD,\ BC \perp SA) \end{array}\right\}$ Nên $H \in SD$

$\Rightarrow$ H là trung điểm của SD (do EH là đường trung bình tam giác SBC)

$\Rightarrow D\left(\frac{4a}{5}; \frac{2a}{5}; 0\right)$.

2. Tính $\cos\varphi$.

Ta có: $BC \perp (SAD) \Rightarrow FE \perp (SAD)$ (do $EF // BC$)

Mà $\begin{cases} (SAD) \cap (ABC) = AD \\ (SAD) \cap (AEF) = AH \end{cases}$ Nên $\cos\varphi = \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH}})\right|$

Do $\overrightarrow{AH} = \frac{a}{10}(4; 2; 15), \overrightarrow{AD} = \frac{2a}{5}(2; 1; 0)$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{|(4; 2; 15)(2; 1; 0)|}{\sqrt{16 + 4 + 225}\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{2}{7}.$$

3. Tính $V_{A.BCFE}$

Ta có:

$$V_{ASEF} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AE}\right]\overrightarrow{AF}\right| = \frac{1}{6}\left|\left[(0;0;3a), \left(\frac{a}{2};0;\frac{3a}{2}\right)\right]\left(0;a;\frac{3a}{2}\right)\right|$$

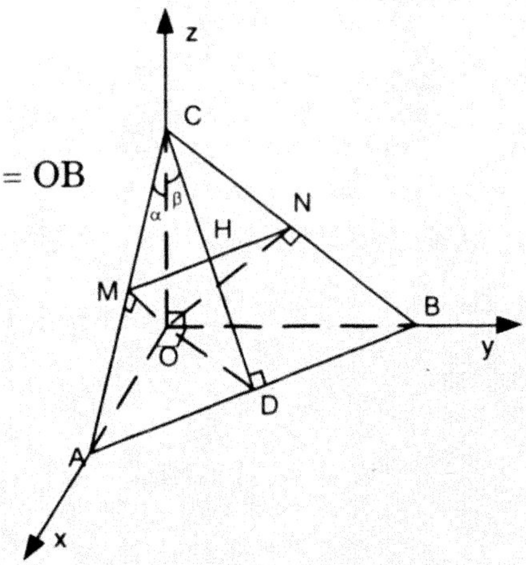
$$= \frac{1}{6}\left|\left(0;\frac{3a^2}{2};0\right)\left(0;a;\frac{3a}{2}\right)\right| = \frac{a^3}{4}$$

$$V_{ASBC} = \frac{1}{6}AS.AB.AC = a^3$$

Vậy $V_{A.BCFE} = V_{ASBC} - V_{ASEF} = \dfrac{3a^3}{4}$

* Chú ý: $S_{\Delta SEF} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta SBC} \Rightarrow V_{A.SEF} = \dfrac{1}{4}V_{A.SBC} = \dfrac{a^3}{4}$.

10.



Ta có: $\begin{cases} OA^2 + OC^2 = AC^2 \\ OB^2 + OC^2 = BC^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 4OB^2 - OA^2 = 4OA^2 - OB^2 \Rightarrow OA = OB$

Đặt $OA = a = OB \Rightarrow OC = a\sqrt{3}$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; a; 0),

C(0; 0; $a\sqrt{3}$).

1. Chứng minh $MN \perp OC$

$\overrightarrow{AC} = \left(-a;0;a\sqrt{3}\right) = -a\left(1;0;-\sqrt{3}\right)$

Ta có phương trình tham số của AC là:

$\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{3}t \end{cases}$ $\quad (t \in R) \Rightarrow M\left(a + t;0;-\sqrt{3}t\right)$ Do $OM \perp AC$ nên

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow a + t + 0 + 3t = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{a}{4} \Rightarrow M\left(\dfrac{3a}{4};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(0;-a;a\sqrt{3}\right) = -a\left(0;1;-\sqrt{3}\right)$.

Suy ra phương trình tham số của BC là:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = a + t \\ z = -\sqrt{3}t \end{cases}$ $(t \in R) \Rightarrow N\left(0; a + t; -\sqrt{3}t\right)$. Do $ON \perp BC \Rightarrow$

$\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow a + t + 3t = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{a}{4} \Rightarrow N\left(0; \dfrac{3a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{OC} = \left(-\dfrac{3a}{4}; \dfrac{3a}{4}; 0\right)\left(0; 0; a\sqrt{3}\right) = 0$. Vậy $MN \perp OC$.

2. Tính $\cos \widehat{MON}$.

$$\cos \widehat{MON} = \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{OM.ON} = \frac{\frac{3a^2}{16}}{\frac{12a^2}{16}} = \frac{1}{4}.$$

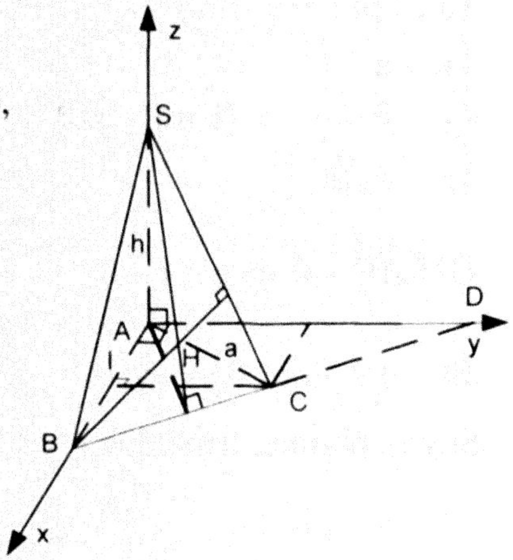
3. Chứng minh $\dfrac{tg^4\widehat{OCD}}{tg^4\widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = 1$ Đặt: $\beta = \widehat{OCD}, \alpha = \widehat{OCA}$

$OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp OD$

$OD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tg\beta = \dfrac{OD}{OC}, \quad tg\alpha = \dfrac{OA}{OC}$

$\Rightarrow \dfrac{tg^4\beta}{tg^4\alpha} = \left(\dfrac{OD}{OA}\right)^4 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}$.

$\Rightarrow \dfrac{tg^4\widehat{OCD}}{tg^4\widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = 1$



11. Gọi I là trung điểm AB. Trong (ABC), vẽ $Ay \perp AB$. Ta có: $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho:
A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), S(0; 0; h)

$\Rightarrow C\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

1. Tính d(A, (SBC)).

Gọi $D = BC \cap Ay \Rightarrow D\left(0; a\sqrt{3}; 0\right)$

$\Rightarrow (SBC) \equiv (SBD)$ Ta có phương trình của mặt phẳng (SBC) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a\sqrt{3}}+\frac{z}{h}=1$$

$$\Leftrightarrow\ h\sqrt{3}x+hy+a\sqrt{3}z-ah\sqrt{3}=0\ \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}.$$

2. Chứng tỏ đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định

Gọi $(\alpha)\equiv(S,\Delta)$, $(\beta)\equiv(B,\Delta)$. Ta có:

$(\alpha)\perp(BC)$, $(\beta)\perp SC$ (do $SH\perp BC$, $\Delta\perp BC$, $BH\perp SC$, $\Delta\perp SC$)

$$\vec{BC}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)=-\frac{a}{2}\left(1;-\sqrt{3};0\right)$$

$$\vec{SC}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-h\right)=\frac{1}{2}\left(a;a\sqrt{3};-2h\right)$$

Suy ra phương trình của mặt phẳng $(\alpha): x-\sqrt{3}y=0$ và phương trình của mặt phẳng $(\beta): a(x-a)+a\sqrt{3}y-2hz=0$. Đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng (α) và (β) nên phương trình của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases}x-\sqrt{3}=0\\ ax+a\sqrt{3}y-2hz-a^2=0\end{cases}$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm cố định khi h thay đổi

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{3}=0\\ z=0\\ x+\sqrt{3}y=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\\ y=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\\ z=0\end{cases}\Rightarrow \Delta \text{ qua } \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2\sqrt{3}};0\right) \text{ cố định.}$$

3. Tính h theo a để SS'_{min}

Ta có: S' ∈ ⇒ S'(0; 0; s')

$$S'\in\Delta\ \Rightarrow -2hs'-a^2=0\ \Rightarrow s'=\frac{-a^2}{2h}$$

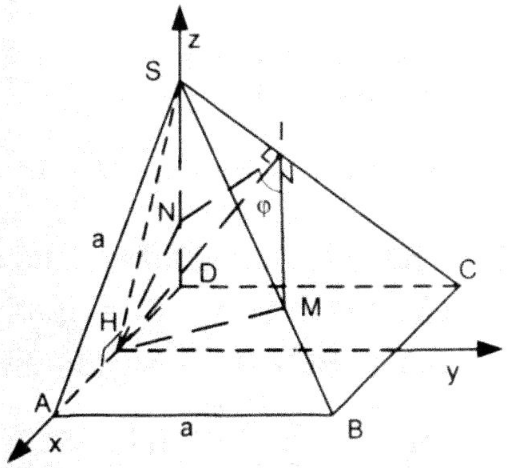
$$\Rightarrow S'\left(0;0;\frac{-a^2}{2h}\right)\ \Rightarrow SS'=h+\frac{a^2}{2h}\geq 2\sqrt{h.\frac{a^2}{2h}}=a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SS'_{min}=a\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ h=\frac{a^2}{2h}\ \Leftrightarrow\ h=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Vậy $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ thì SS' nhỏ nhất.

12. Ta có: SH ⊥ AD.

$\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ (ΔSAB đều)



Chọn hệ trục tọa độ Hxyz sao cho:

$$H(0;0;0), A\left(\frac{a}{2};0;0\right), S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow D\left(-\frac{a}{2};0;0\right), B\left(\frac{a}{2};a;0\right), C\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$$

1. Tính d(D, (SBC)), d(HC,SD). Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(\frac{a}{2};a;\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a}{2};a;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \frac{a}{2}\left(-\frac{a}{2}\right) + a^2 + \left(\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(0;\sqrt{3};2\right).$$

Vậy mặt phẳng (SBC) có phương trình $\sqrt{3}y + 2z - a\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow d\left(D,(SBC)\right) = a\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\overrightarrow{HC} = \left(\frac{-a}{2};a;0\right)$; $\overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a}{2};0;\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right)$;

$\overrightarrow{HS} = \left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\overrightarrow{SD} = \left(-\frac{a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

nên $d(HC,SD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{HC},\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{HS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{HC},\overrightarrow{SD}\right]\right|} = \dfrac{a\sqrt{3}}{19}$.

2. Chứng tỏ mặt phẳng (α) cắt cạnh SB, SD.

Ta có: $\overrightarrow{SC} = -\frac{a}{2}\left(1;-2;\sqrt{3}\right)$

Nên phương trình mặt phẳng (α) : $2 - 2y + \sqrt{3}z = 0$ và phương trình của

$$(SC):\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}t \end{cases} \quad (t \in R) \Rightarrow I\left(-\frac{3a}{16};\ \frac{6a}{16};\ \frac{5a\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$\overrightarrow{SB} = \frac{a}{2}\left(1; 2; -\sqrt{3}\right) \ \Rightarrow \text{ptts}(SB):\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}t \end{cases} \quad (t \in R).$$

Gọi $M = (SB) \cap (\alpha) \ \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{4};\ \dfrac{a}{2};\ \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Vì $x_S < x_M < S_B$ nên M thuộc cạnh SB.

$$\overrightarrow{SD} = \left(-\frac{a}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(1; 0; \sqrt{3}\right) \Rightarrow \text{pt}(SD):\begin{cases} x = -\dfrac{a}{2} + t \\ y = 0 \\ z = \sqrt{3}t \end{cases} \quad (t \in R).$$

Gọi $N = (SD) \cap (\alpha) \ \Rightarrow N\left(-\dfrac{3a}{8}; 0; \dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right)$.

Vì $x_D < x_N < S$ nên N thuộc cạnh SB.

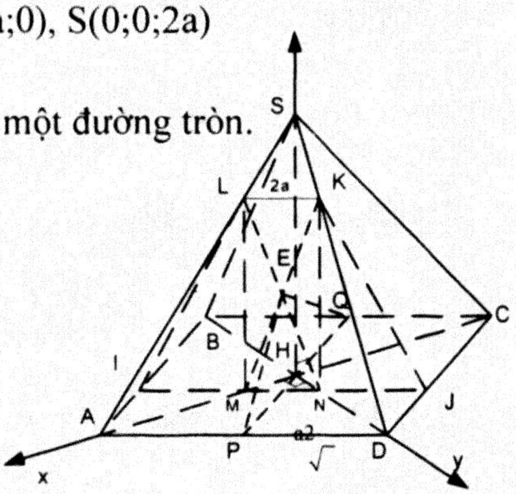
* Tính $[B, SC, D] = \varphi$.

$\cos\varphi = \cos\widehat{MIN} = \dfrac{\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}}{IM.IN} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

13. Ta có: H là tâm hình vuông ABCD và HA = a. Chọn hệ trục tọa độ Hxyz sao cho: H(0;0;0), A(a;0;0), D(0;a;0), S(0;0;2a)

$\Rightarrow$ C(–a;0;0), B(0;–a;0)

1. Tìm M để tứ giác IJKL ngoại tiếp được một đường tròn.



Gọi M(m; 0; 0), $0 \le m \le a$

$\overrightarrow{AD} = (-a; a; 0); \overrightarrow{SH} = (0; 0; -2a)$

$\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{SH}\right] = -2a\,(1; 1; 0)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là:

$x + y - m = 0$.

Dễ thấy:

$I\left(\frac{m+a}{2};\ \frac{m-a}{2};\ 0\right)$, $J\left(\frac{m-a}{2};\ \frac{m+a}{2};\ 0\right)$

$\overrightarrow{SA} = a(1;0;-2)$, $\overrightarrow{SD} = a(0;1;-2)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng SA là:

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases} (t \in R) \text{ và } pt(SD): \begin{cases} x = 0 \\ y = a + t \, (t \in R) \\ z = -2t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L(m; 0; 2a – 2m), K(0; m; 2a – 2m)

Tứ giác IJKL ngoại tiếp được $\Leftrightarrow$ KL + IJ = IL + KJ

$$\Leftrightarrow m\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 9(a - m) \Leftrightarrow m = \frac{(9-\sqrt{2})a}{9+\sqrt{2}}. \text{ Vậy } HM = \frac{(9-\sqrt{2})a}{9+\sqrt{2}}.$$

2. Tìm m để V_{max}

Đặt: $V = V_{DIJKLH} = V_{D.IJKL} + V_{H.IJKL}$

Ta có: $\begin{cases} LM \perp IJ \\ LK \,//\, IJ \end{cases} \Rightarrow S_{IJKL} = LM.\frac{LK.IJ}{2}$

$$\Rightarrow S_{IJKL} = (2a - 2m)\frac{\sqrt{2}(a+m)}{2} = \sqrt{2}(a^2 - m^2)$$

$$d(H,(\alpha)) = \frac{m}{\sqrt{2}},\ d(D,(\alpha)) = \frac{a-m}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\sqrt{2}(a^2 - m^2)\left(\frac{m}{\sqrt{2}} + \frac{a-m}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}a(a^2 - m^2) \le \frac{1}{3}a^3$$

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{a^3}{3} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy M trùng H.

3. Tìm M để $\widehat{PEQ} = 90^\circ$.

Ta có: $P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), Q\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$. Dễ thấy MNKL là hình chữ nhật suy ra E là trung điểm MK nên

$$E\left(\frac{m}{2};\ \frac{m}{2};\ a - m\right);\ \overrightarrow{EP} = \left(\frac{a-m}{2};\ \frac{a-m}{2};\ -a + m\right);$$

$$\overrightarrow{EQ} = \left(\frac{-a-m}{2};\ \frac{-a-m}{2};\ -a + m\right)$$

Suy ra: $\vec{EP}.\vec{EQ} = 0 \Leftrightarrow -a - m + 2a - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{a}{3}$.

14. 1. Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2;-2;-5)$

Rõ ràng là hai vectơ đó không cùng phương, vậy ba điểm M_1; M_2; M_3 không thẳng hàng.

Diện tích S của tam giác $M_1M_2M_3$ có thể tính theo công thức:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right]\right|$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\right) = (2;3;-2)$

Vậy $S = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

2. Gọi V là thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$ thì

$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right].\overrightarrow{OM_3}\right|$. Ta có $\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right] = (1;-1;-1)$

$\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right].\overrightarrow{OM_3} = 0 + 1 + 4 = 5$. Vậy $V = \frac{5}{6}$ (đvtt).

3. Vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = (2;3;-2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Vậy (α) có phương trình:

$2(x-2) + 3(y-1) - 2(z-1) = 0$ Hay $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

4. Ta có $\overrightarrow{M_2M_3} = (-3;-2;-6)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β).

Vậy (β) có phương trình:

$-3(x-2) - 2(y-1) - 6(z-1) = 0$ hay $3x + 2y + 6z - 14 = 0$

5. Mặt phẳng (γ) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;0;1)$ và $\overrightarrow{OM_3} = (0;-1;-4)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{OM_3}\right] = (1;4;-1)$.

Vậy (γ) có phương trình:

$1(x-2) + 4(y-1) - 1(z-1) = 0$ hay $x + 4y - z - 5 = 0$.

15. 1. Giả sử $A = (a;0;0)$; $B = (0;b;0)$; $C = (0;0;c)$.

Khi đó vì M là trọng tâm tam giác ABC nên $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Từ đó suy ra $a = 3$; $b = 6$ và $c = 9$. Vậy (α) có phương trình $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$

2. Nếu M là trực tâm tam giác PRQ thì $OM \perp mp(PRQ)$ hay $OM \perp (\beta)$. Như vậy (β) là mặt phẳng đi qua $M(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$. Vậy (β) có phương trình:

$$1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \text{ hay } x+2y+3z-14=0.$$

3. Giả sử $D=(d;0;0)$, $E=(0;e;0)$, $F=(0;0;f)$ với $d>0, e>0, f>0$.

Khi đó (γ) có phương trình $\frac{x}{d}+\frac{y}{e}+\frac{z}{f}=1$. Vì M nằm trên (γ) nên

$$\frac{1}{d}+\frac{2}{e}+\frac{3}{f}=1$$

Theo bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

$$1=\frac{1}{d}+\frac{2}{e}+\frac{3}{f}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{d}.\frac{2}{e}.\frac{3}{f}}=3\sqrt[3]{\frac{6}{def}}$$

hay là $1 \ge \frac{27,6}{def} \Leftrightarrow \frac{def}{6}\ge 27$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{d}=\frac{2}{e}=\frac{3}{f}$

hay $d=3$; $e=6$; $f=9$. Thể tích V của tứ diện ODEF là

$$V=\frac{1}{6}OD.OE.OF=\frac{def}{6}\ge 27$$

Vậy thể tích nhỏ nhất là 27. Khi đó phương trình mặt phẳng (γ) là:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$$

Chính là mặt phẳng (α) trong câu a.

16. 1. Giả sử mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$

Vì (α) đi qua M_1 và M_2 nên

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ 2A-B+D=0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $C=A-B$ và $D=-2A+B$

Vì khoảng cách từ M_3 tới (α) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\frac{|C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |A|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{A^2+B^2+(A-B)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2A^2=A^2+B^2+A^2+B^2-2AB \Leftrightarrow 2B(B-A)=0$$

* Nếu $B = 0$ thì $C = A$, $D = -2A$. Ta lấy $A = 1$ thì phương trình (α) là $x + z - 2 = 0$.

* Nếu $B = A$ thì $C = 0$ và $D = -A$. Ta lấy $A = 1$ thì phương trình (α) là $x + z - 1 = 0$.

2. Mặt phẳng (β) đi qua $M_3(0;0;1)$ nên có phương trình

$$A(x-0) + B(y-0) + C(z-1) = 0 \text{ hay } Ax + By + Cz - C = 0.$$

Khoảng cách từ M_1, M_2 tới (β) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\frac{|A + C - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2A - B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Từ đó ta có: $|A| = |2A - B - C|$ hay $\pm A = 2A - B - C$

Suy ra: hoặc $C = A - B$ hoặc $C = 3A - B$

* Với $C = A - B$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2 = A^2 + B^2 + (A - B)^2 \Leftrightarrow 2B(B - A) = 0$$

* Nếu $B = 0$ thì $C = A$, ta lấy $A = 1$ thì (β) có phương trình: $x + z - 1 = 0$.

* Nếu $A = B$ thì $C = 0$, ta lấy $A = 1$ thì (β) có phương trình: $x + y = 0$.

*Với $C = 3A - B$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2 = A^2 + B^2 + (3A - B)^2 \Leftrightarrow 8A^2 - 6AB + 2B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4A^2 - 3AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow \left(2A - \frac{3}{4}B\right)^2 + \frac{7B^2}{16} = 0.$$

Như vậy $2A - \frac{3}{4}B = 0$ và $B = 0$, tức là $A = 0$, $B = 0$ và do đó $C = 0$.

Không xảy ra trường hợp này.

17. 1. Đường thẳng Δ đi qua điểm $I(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-2)$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $I'(2;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (1;-1;0)$. Ta có: $\overrightarrow{II'} = (1;-1;3)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (2;2;2)$

Bởi vậy $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{II'} = 1.2 + (-1).2 + 3.2 = 6 \neq 0$

Điều đó chứng tỏ ba vectơ $\vec{u'}$, $\vec{u}$, $\overrightarrow{II'}$ không đồng phẳng và do đó hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau.

2. Mỗi điểm M trên đường thẳng Δ có toạ độ $(1+t;\ 2+t;\ -2-2t)$, mỗi điểm M' trên đường thẳng Δ' có toạ độ $(2+t';\ 1-t';\ 1)$.

Như vậy $\overrightarrow{MM'} = (1+t'-t;\ -1-t'-t;\ 3+2t)$.

Ta cần tìm M và M' sao cho đường thẳng MM' vuông góc với cả hai đường thẳng Δ và Δ', tức là $\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0$, $\overrightarrow{MM'}.\vec{u'} = 0$. Vậy

$$\begin{cases} 1(1+t'-t)+1(-1-t'-t)-2(3+2t)=0 \\ 1(1+t'-t)-1(-1-t'-t)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6-6t=0 \\ 2+2t'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad t=t'=-1$$

Vậy $M=(0;1;0)$, $M'=(1;2;1)$. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ và Δ' là đường thẳng MM' nên có phương trình:

$$\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}.$$

3. Khoảng cách giữa Δ và Δ' là độ dài đoạn thẳng MM'. Vậy

$$MM' = \sqrt{1^2+(2-1)^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

18. 1. Đường thẳng Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng cho bởi phương trình (1) và (2). Hai mặt phẳng đó có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1} = (1;-m;1)$ và $\vec{n_2} = (m;1;-m)$. Bởi vậy Δ_m có vectơ chỉ phương $\vec{u_m}$ là:

$$\vec{u_m} = \left[\vec{n_1},\vec{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -m & m \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(m^2-1;\ 2m;\ m^2+1\right)$$

Gọi φ là góc hợp bởi Δ_m và trục Oz thì:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u_m}.\vec{j}\right|}{\left|\vec{u_m}\right|.\left|\vec{j}\right|} = \frac{m^2+1}{\sqrt{\left(m^2-1\right)^2+4m^2+\left(m^2+1\right)^2}} = \frac{m^2+1}{\sqrt{2m^4+4m^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \varphi = 45°$. Vậy φ không phụ thuộc vào m và $\varphi = 45°$.

2. * Toạ độ giao điểm P của Δ_m và mặt phẳng $z=0$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - my - m = 0 \\ mx + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Như vậy điểm P có tọa độ:

$$x_P = \frac{2m}{1 + m^2}; \quad y_P = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}; \quad z_P = 0$$

Nhận xét rằng $x_P^2 + y_P^2 = \dfrac{4m^2}{\left(1 + m^2\right)^2} + \dfrac{\left(1 - m^2\right)^2}{\left(1 + m^2\right)^2} = \dfrac{\left(1 + m^2\right)^2}{\left(1 + m^2\right)^2} = 1$.

Như vậy quỹ tích giao điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nằm trong mặt phẳng $z = 0$.

* Toạ độ giao điểm Q của Δ_m và mặt phẳng x = 0 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -my + z - m = 0 \\ y - mz - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1 + m^2}{1 - m^2} \quad (m^2 \neq 1) \\ z = \dfrac{2m}{1 - m^2} \quad (m^2 \neq 1). \\ x = 0 \end{cases}$$

(Khi $m^2 = 1$, tức $m = \pm 1$, đường thẳng Δ_m không cắt mặt phẳng x = 0)

Như vậy toạ độ của Q là $x_Q = 0$, $y_Q = \dfrac{1 + m^2}{1 - m^2}$, $z_Q = \dfrac{2m}{1 - m^2}$

Chú ý rằng $y_Q{}^2 - z_Q{}^2 = \dfrac{\left(1 + m^2\right)^2 - 4m^2}{\left(1 - m^2\right)^2} = \dfrac{\left(1 - m^2\right)^2}{\left(1 - m^2\right)^2} = 1$

Vậy quỹ tích của Q là hypebol $y^2 - z^2 = 1$ nằm trong mặt phẳng x = 0.

* Toạ độ giao điểm R của Δ_m và mặt phẳng y = 0 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - m = 0 \\ mx - mz - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2 + 1}{2m} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{m^2 - 1}{2m} \end{cases} \quad (m \neq 0).$$

(Khi m = 0 đường thẳng Δ_m không cắt mặt phẳng y = 0). Như vậy toạ độ điểm R là: $x_R = \dfrac{m^2 + 1}{2m}$; $y_R = 0$; $z_R = \dfrac{m^2 - 1}{2m}$

Chú ý rằng $x_R{}^2 - z_R{}^2 = \dfrac{(m^2+1)^2 - (m^2-1)^2}{4m^2} = 1$

Vậy quỹ tích của R là hypebol $x^2 - z^2 = 1$ nằm trong mặt phẳng y = 0.

3. Đường thẳng Δ_m đi qua M có tọa độ $M = \left(\dfrac{2m}{1 + m^2}; \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}; 0 \right)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_m} = (m^2 - 1;\ 2m;\ m^2 + 1)$. Đường thẳng Oz đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{j} = (0;0;1)$. Ta có:

$\left[\overrightarrow{u_m}, \vec{j}\right] = (2m; 1 - m^2; 0)$ $\left[\overrightarrow{u_m}, \vec{j}\right].\overrightarrow{OM} = \dfrac{4m^2}{1 + m^2} + \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} = 1 + m^2 \neq 0$.

Vậy Δ_m và Oz chéo nhau. Gọi d là khoảng cách giữa chúng thì:

$d = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_m}, \vec{j}\right].\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_m}, \vec{j}\right]\right|} = \dfrac{1 + m^2}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = 1$. Vậy d không đổi.

19.1. Mặt phẳng (α_1) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Oxy $\Rightarrow (\alpha_1) // Oz \Rightarrow (\alpha_1)$ có phương trình dạng $Ax + By + D = 0$.

Do (α_1)đi qua $M(1;2;-2)$ và $N(2;0;-2)$ ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} A + 2B + D = 0 \\ 2A + D = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} A = 2B \\ D = -4B \end{cases}$ lấy $B = 1$

Vậy (α_1) có phương trình $2x + y - 4 = 0$

Mặt phẳng (α_2) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ $(Oyz) \Rightarrow (\alpha_2) // Ox \Rightarrow (\alpha_2)$ có dạng $By + Cz + D = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2B - 2C + D = 0 \\ -2C + D = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} B = 0 \\ D = 2C \end{cases}$ lấy $C = 1$ có $D = 2$

Vậy ta có (α_2) có phương trình $z+2=0$.

Mặt phẳng (α_3) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ $(Ozx) \Rightarrow (\alpha_3) // Oy \Rightarrow (\alpha_3)$ có dạng $Ax + Cz + D = 0$. Đồng thời có thể hiểu (α_3) thuộc chùm mặt phẳng qua M, N nên

$$Ax + Cz + D = \lambda(2x + y - 4) + \mu(z + 2) \qquad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2\lambda \\ 0 = B = \lambda \\ C = \mu \\ D = -4\lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B = 0 \\ C = \mu \\ D = 2\mu \end{cases} \quad \text{cho } \mu = 1$$

Vậy (α_3) có phương trình: $z+2=0$.

2. Mặt phẳng (α) đi qua M, N nên thuộc vào chùm mặt phẳng qua đường thẳng MN, theo câu a, ta suy ra (α) có dạng:

$\lambda(2x + y - 4) + \mu(z+2) = 0 \; (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

hay $2\lambda x + \lambda y + \mu z - 4\lambda + 2\mu = 0$

Do mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x + y + 2z - 1 = 0$ nên vectơ pháp tuyến của (α) vuông góc với vectơ pháp tuyến của $(P) \Leftrightarrow \vec{a} = (2\lambda; \lambda; \mu) \perp \vec{b} = (3;1;2)$, nghĩa là tích vô hướng của chúng bằng 0 $\Leftrightarrow 6\lambda + \lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow 2\mu = -7\lambda$. Lấy $\lambda = 2$; có $\mu = -7$.

Vậy (α) có phương trình $4x + 2y - 7z - 22 = 0$.

20. Viết phương trình đường thẳng qua A = (3; 2; –1) và vuông góc với mặt phẳng (α): $2x - y + 7z - 1 = 0$. Ta có mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-1;7)$; (d) là đường thẳng qua A và vuông góc (α) nên (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{n} = (2;-1;7)$.

Vậy phương trình của đường thẳng (d) là : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 7t \end{cases}$.

21. Đường thẳng (d) qua $M_0 =$ (12; 9; 1) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;3;1)$ mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 5; -1)$ nên:

$\vec{a}.\vec{n} = 12 + 15 - 1 = 26 \neq 0$ nên (d) cắt mặt phẳng (α).

22. Đường thẳng (d) qua $M_0 = (1; 1; 1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -1; 0)$.

Đường thẳng (d') qua $M_0' = (2; 2; 0)$ có vectơ chỉ phương

$\vec{b} = (-3; 3; 3) \Rightarrow [\vec{a}; \vec{b}] = (-3; -3; 0)$;

$\overrightarrow{MM_0} = (1; -3; -1) \Rightarrow [\vec{a}; \vec{b}]\overrightarrow{MM_0} = 6 \neq 0$. Nên (d) và (d') chéo nhau.

23. Gọi (α) là mặt phẳng qua (d) và song song với (d'). Suy ra (α) qua M_0 và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}; \vec{b}$ nên (α) có phương trình:

$$-3(x - 1) - 3(y - 1) + 0(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

Vậy khoảng cách giữa (d) và (d') là $d(d; d') = \dfrac{|2 - 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

24. $(d): \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 3}{1} = \dfrac{z - 4}{-2}$;

$(d'): \dfrac{x + 2}{1} = \dfrac{y - 1}{-2} = \dfrac{z + 1}{2}$

$\vec{a} = (2; 1; -2)$ là vectơ chỉ phương của (d); $\vec{b} = (1; -2; 2)$ là vectơ chỉ phương của (d'). Gọi (P) là mặt phẳng qua (d) và vuông góc với (α) suy ra (P) qua $M_0 = (1; -3; 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = [\vec{a}; \vec{n'}]$ trong đó $\overrightarrow{n_p} = [\vec{a}; \vec{n'}] = (-2; -6; -5)$; $\vec{n}' = (-17; 14; -10)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là :

$17x - 14y + 10z - 99 = 0$.

* Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua (d') và vuông góc với (α) vectơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_q} = [\vec{b}; \vec{n'}] = (22; 1; -10)$. Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là: $22x + y - 10z + 33 = 0$. Suy ra phương trình đường vuông góc chung là $\begin{cases} 17x - 14y + 10z - 99 = 0 \\ 22x + y - 10 + 33 = 0 \end{cases}$.

25. Phương trình mặt cầu (C) là:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 2z - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 4 + 16 + 1 + 4 = 25 > 0$$

Nên (C) là mặt cầu tâm $I = (-2; -4; 1)$ và có bán kính $R = 5$

Khoảng cách từ I đến (α): $IH = d(I, \alpha) = \dfrac{|-2 - 4 - 1 - 10|}{\sqrt{3}} = \dfrac{17}{\sqrt{3}}$.

26. Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-3;1;1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) qua A, vuông góc với đường thẳng (d) nên phương trình của (α) là:

$$-3(x-2)+(y-1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow -3x+y+z+6=0$$

Gọi A' là hình chiếu của A trên đường thẳng (d) ta có phương trình tham số của đường thẳng (d) là: $\begin{cases} x = -3-8t \\ y = 1+t \\ z = 6+t \end{cases}$. Thế vào phương trình mặt phẳng (α) ta có: $t = -2$. Vậy A'= (3; –1 ;4).

27. Phương trình tham số của đường thẳng (d) qua M và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 1-3t \end{cases}$ Thế vào phương trình mặt phẳng (α) ta có $t = -1$

Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α) suy ra $H = (0;1;4)$.

N là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MH} \Rightarrow N = (-1;3;7)$.

28. Phương trình tổng quát của mặt cầu qua gốc O có dạng:

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$. Thế tọa độ A; B; C vào phương trình mặt cầu giải hệ phương trình suy ra $a = -1$; $b = -1$; $c = -1$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$.

29. Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\overrightarrow{BC} = (-1;2;1)$. Vậy phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC là :

$$-1(x+1)+2(y-1)+z-2=0 \Leftrightarrow -x+2y+z-5=0.$$

30. Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm I = (5; 0; 0); J = (0; –3; 0) K = (0; 0; –5) là: $y-z+3=0$.

31. Câu D.

Ta có: $\vec{a} = (3;0;-6)$; $\vec{b} = (2;-4;0)$; $\vec{a}\vec{b} = 3.2-4.0-6.0 = 6$.

32. Câu B.

A = (–1; 2; 1); B = (1; 1; 1); C = (0; 3; 2) suy ra

$\Rightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = (-1;-2;3)$.

33. Câu C.

$\overrightarrow{AB} = (-1;2;0); \overrightarrow{AC} = (1;1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (6;3;-3)$ nên diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\| = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ (đvdt).

34. Câu A.

Cho đường thẳng (Δ'') có phương trình $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

Mặt phẳng $x + y - z + 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-1)$. Mặt phẳng $2x - y + 3z - 4 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = (2;-1;3)$ do đó vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ'') là $\vec{u} = \left[\vec{n}, \vec{n'}\right] = (2;-5;-3)$.

35. Câu C.

Đường thẳng song song với đường thẳng (Δ'') nên nhận vectơ $\vec{u} = (2;-5;-3)$ làm vectơ chỉ phương, đường thẳng(d) qua C = (1; 2; –1).

Nên phương trình tham số của đường thẳng(d) là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$.

36. Câu D.

Mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y - 2z + 1 = 0$

Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$ có bán kính:

$R = \sqrt{9 + 1 + 1 - 10} = 1$ và tâm I (3; –1; 1)

$\Rightarrow d(I,(\alpha)) = IH = \frac{|3 - 2 - 2 + 1|}{3} = 0$ nên mặt phẳng (α) qua tâm I của mặt cầu suy ra đường tròn đã cho có bán kính R = 1.

37. Câu B.

Mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + 3z + 1 = 0$ nên $\vec{n} = (2;-1;3)$ là vectơ pháp tuyến. Mặt phẳng (α') có phương trình $x + y - z + 5 = 0$ nên $\vec{n'} = (1;1;-1)$ là vectơ pháp tuyến. Giao tuyến của 2 mặt phẳng (α); (α') là đường thẳng (Δ) có phương trình:

$\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ nên có một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = \left[\vec{n}, \vec{n'}\right]$

$= (-2;\ 5;\ 3)$.$M_0 = (-2;\ -3;\ 0)$ thuộc đường thẳng (Δ) .Ta có:

$\overrightarrow{M_0M} = (3;\ 3;\ 5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right] = (-16; -19; 21)$

$$\Rightarrow d\left(M, (\Delta)\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \sqrt{\frac{529}{19}}.$$

38. Câu C. Mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + 3z + 1 = 0$ nên $\vec{n} = (2; -1; 3)$ là vectơ pháp tuyến. Đường thẳng (d) qua $M = (2;\ -1;\ 5)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) nên nhận $\vec{n} = (2; -1; 3)$ làm vectơ chỉ phương suy ra phương trình tham số của đường thẳng (d) là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad (t \in R)$.

39. Câu D.

Cách 1:

Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-18; -36; 0)$

Hay $\vec{n'} = (1;\ 2;\ 0)$ nên mặt phẳng (ABC) có phương trình:

$x - 6 + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0.$

Đường cao $DH = d\left(D, (ABC)\right) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Vậy thể tích tứ diện là $V = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.DH = \dfrac{1}{3} 9\sqrt{5}\ \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow V = 12$(đvtt)

Cách 2: $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = 12$(đvtt).

40. Câu B.

Đường thẳng qua $A = (2;\ 1;\ -2)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình: $3x - 5y + 2z + 4 = 0$ nên đường thẳng (d) nhận $\vec{n} = (3;\ -5;\ 2)$ làm véctơ chỉ phương .

Vậy phương trình tham số của đường thẳng (d) là: $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Cho hình nón N có chiều cao bằng $2h\sqrt{3}$ và góc ở đỉnh bằng 60°. Tính diện tích xung quanh của hình nón N bằng:

2. Cho hình nón N có bán kính $a\sqrt{2}$ và góc hợp bởi một đường sinh và mặt đáy bằng α ($0° < \alpha < 90°$). Tính thể tích của hình nón N .

3. Cho hình nón N có chiều cao bằng $\frac{3a}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua trục của N và cắt N theo thiết diện là một tam giác vuông. Tính diện tích toàn phần của hình nón N .

4. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính thể tích khối nón N ngoại tiếp S.ABC (Hình nón N có đỉnh là S và đáy là hình tròn ngoại tiếp ABC)

5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao bằng h và cạnh bên bằng l. Tính thể tích khối nón N ngoại tiếp S.ABCD (hình nón N có đỉnh là S và đáy là hình tròn ngoại tiếp ABCD):

6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 4 điểm $A = (0; 0; 3)$ $B = (1;1;5)$ $C = (-3;0;0)$ $D = (0;-3;0)$. Tính toạ độ $\vec{x}$ thoả

$\vec{x} = \left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}^2\,\overrightarrow{AB}$.

7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$(d)\ \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng (α) $3x + 5y - z - 2 = 0$.

a. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α).

b. Giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) là I.
Tính toạ độ điểm I.

c. Viết phương trình mặt phẳng (α') qua $M = (1; 2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng (d).

d. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (α).

8. Tính khoảng cách từ điểm $M_1 = (1; -1; 1)$ đến đường thẳng:

$(d')\ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $M_1 = (2; 3; -4)$ $M_2 = (4; -1; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng M_1M_2 .

10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tính diện tích tam giác ABC biết $A = (-1; 2; 0)$; $B = (0; 1; 0)$; $C = (3; -3; 1)$.

11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ trên mặt phẳng (Oxy).

12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tính bán kính mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng (α) và (α') có phương trình (α): $2x - y + z + 2 = 0$; (α'): $x + y + 2z - 1 = 0$
Viết phương trình tham số của giao tuyến hai mặt phẳng (α) và (α') .

14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α') có phương trình (α): $2x - y + z + 2 = 0$; (α'): $x + y + 2z - 1 = 0$.

15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (α) và (α') có phương trình
(α): $2x - y + 2z - 1 = 0$; (α'): $x + 6y + 2z + 5 = 0$.
Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (β) đi qua gốc toạ độ và qua giao tuyến Δ của (α) và (α') .

16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A = (1; 2; -3)$ và song song với cả hai mặt phẳng (α) và (α') có phương trình (α): $2x - y + 2z - 1 = 0$; (α'): $x + 6y + 2z + 5 = 0$.

17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng
(α): $2x + ky + 3z - 5 = 0$ và (α'): $mx - 6y - 6z + 2 = 0$. Tính giá trị k và m để $(\alpha) // (\alpha')$.

18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng
(α): $2x + 3y + 3z - 5 = 0$ và (α'): $2x + 3y + 3z - 1 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (α') .

19. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng
$(d): \begin{cases} 2x + 3z - 5 = 0 \\ 3y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ và $A = (1; 1; 1)$. H là hình chiếu của A trên đường thẳng (d). Tính toạ độ của điểm H .

20. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz , cho tứ diện ABCD có $A = (6; -2; 3)$; $B = (0; 1; 6)$; $C = (2; 0; -1)$; $D = (4; 1; 0)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

21. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$; $\vec{b} = (0; 2; -1)$; $\vec{c} = (1; 7; 2)$; $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$. Tính toạ độ của véctơ $\vec{d}$.

22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tính toạ độ điểm M sao cho $M \in mp(Oxz)$ và M cách đều 3 điểm $A = (1; 1; 1)$ $B = (-1; 1; 0)$ $C = (3; 1; -1)$ là:

23. (*Đề thi ĐH khối A – 2002*).

Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng có phương trình:

$$d_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}; \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2.

b. Cho điểm M(2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng d_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

24. (*Đề thi ĐH khối D – 2002*).

Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng d_m có phương trình:

$$d_m : \begin{cases} (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases} \text{(m là tham số)}$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

25. Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x - y + z + 3 = 0$ và hai điểm A(–1; –3; –2), B(–5; 7; 12).

a. Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

b. Giả sử M là một điểm chạy trên mặt phẳng (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: MA + MB.

26. Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1 : \begin{cases} x - az - a = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} ax + 3y - 3 = 0 \\ x - 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

a. Tìm a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

b. Với a = 2, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_2 và song song với đường thẳng d_1. Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2 khi a = 2.

27. Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng:

$$d: \begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M, N sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng 9.

28. Trong không gian tọa độ Oxyz cho tứ diện ABCD với A(2; 3; 2), B(6; –1; –2), C(–1; –4; 3), D(1; 6; –5).

a. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

b. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng CD sao cho ΔABM có chu vi nhỏ nhất.

29. Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình: $d: \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$; $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$

a. Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d với mặt phẳng (P). Tính góc giữa d và (P).

b. Viết phương trình mặt phẳng (P') qua điểm $M_0(1; 2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng d.

c. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên mp(P).

d. Cho điểm B(1; 0; –1), hãy tìm tọa độ điểm B' sao cho mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BB'.

e. Viết phương trình đường thẳng d_1 nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc và cắt đường thẳng d.

30. Trong không gian Oxyz cho điểm M(1; 0; 5) và hai mặt phẳng:

$(\alpha): 2x - y + 3z + 1 = 0$

$(\alpha'): x - y + z + 5 = 0$

a. Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α').

b. Viết phương trình tham số của giao tuyến d của (α) và (α').

c. Gọi H là hình chiếu của M trên mp(α), K là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α'). Tính độ dài đoạn HK.

d. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d.

e. Viết phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với đường thẳng d.

g. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (α') và vuông góc với mặt phẳng (P): $3x - y + 1 = 0$.

31. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng.

$$d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t; \\ z = 4 \end{cases} \quad d': \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$ và điểm $M_0(1; 1; 2)$

a. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d'.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa d' và song song với d.

c. Viết phương trình mặt phẳng qua M_0 và vuông góc với d.

d. Viết phương trình đường thẳng qua M_0, cắt d và d'.

e. Tính khoảng cách giữa d và d'.

g. Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho bốn điểm A(–2; 1; 4), B(0; 4; 1), C(5; 1; –5), D(–2; 8; –5) và đường thẳng d:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+11}{5} = \frac{z-9}{-4}.$$

a. Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

c. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d. Tìm các giao điểm M, N của đường thẳng d với mặt cầu (S).

e. Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M, N. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng đó.

33.Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh là a. Xét hai điểm $M \in AD'$, $N \in DB$ sao cho $AM = DN = k$ ($0 < k < a\sqrt{2}$) và P là trung điểm của B'C'.

a. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AP và BC'

b. Tính thể tích khối tứ diện APBC'.

c. Chứng minh MN luôn song song với mặt phẳng (A'D'CB) khi k biến thiên.

d. Tính k để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

e. Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB và MN song song với A'C.

34. Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA bằng 2a, tam giác ABC vuông ở C có cạnh huyền AB = 2a, $\widehat{CAB} = 30°$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB.

1. Tính thể tích khối chóp H.ABC
2. Chứng minh rằng AH ⊥ SB và SB ⊥ (AHK)
3. Tính thể tích khối chóp S.AHK.

35. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có mặt đáy là tam giác ABC vuông tại B và AB = a, BC = 2a, AA′ = 3a. Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với CA′ lần lượt cắt các đoạn thẳng CC′ và BB′ tại M và N.

1. Tính thể tích khối chóp C.A′AB.
2. Chứng minh rằng AN ⊥ A′B.
3. Tính thể tích khối tứ diện A′AMN.
4. Tính diện tích tam giác AMN.

36. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và mp(SAB) vuông góc với mp(ABCD). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

37. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O; R) và (O′; R), $OO' = R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh O′ và đáy là hình tròn (O; R)

1. Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.
2. Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

38. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $M_1(2;1;1)$, $M_2(3;1;2)$, $M_3(0;-1;-4)$.

a/ Chứng minh rằng ba điểm M_1 ; M_2 ; M_3 không thẳng hàng, tính diện tích tam giác $M_1M_2M_3$.

b/ Tính thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$.

c/ Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm M_1 ; M_2 ; M_3.

d/ Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm M_1 và vuông góc với đường thẳng M_2M_3.

e/ Viết phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm M_1, M_2 và song song với đường thẳng OM_3.

39. Trong hệ toạ độ Oxyz cho điểm $M(1;2;3)$

a/ Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC.

b/ Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm P,R, Q sao cho M là trực tâm tam giác PRQ.

c/ Viết phương trình mặt phẳng (γ) đi qua M cắt Ox, Oy, Oz tại các điểm D, E, F sao cho tứ diện ODEF có thể tích bé nhất.

40 .Trong hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $M_1(1;0;1)$, $M_2(2;-1;0)$ và $M_3(0;0;1)$.

a/ Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm M_1, M_2 mà khoảng cách từ M_3 đến (α) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b/ Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M_3 mà khoảng cách từ M_1 và M_2 tới (β) đều bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

41. Trong hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt với phương trình tham số

$$\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=-2-2t\end{cases}\qquad\qquad \Delta':\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=1\end{cases}$$

a/ Chứng tỏ hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau.

b/ Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ và Δ'.

c/ Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'.

42. Trong hệ toạ độ Oxyz với mỗi số thực m xét đường thẳng Δ_m có phương trình:

$$\begin{cases}x-my+z-m=0 & (1)\\mx+y-mz-1=0 & (2)\end{cases}$$

a/ Tìm vectơ chỉ phương của Δ_m. Chứng minh rằng góc hợp bởi đường thẳng Δ_m và trục Oz không phụ thuộc vào m. Tìm giá trị của góc không đổi đó.

b/ Khi m thay đổi, tìm quỹ tích giao điểm của đường thẳng Δ_m với các mặt phẳng toạ độ.

c/ Chứng minh rằng khoảng cách giữa đường thẳng Δ_m và trục Oz không phụ thuộc vào m. Tính giá trị của khoảng cách đó.

43. Trong hệ toạ độ Oxyz cho hai điểm $M(1;2;-2)$ và $N(2;0;-2)$.

a/ Viết phương trình tổng quát của các mặt phẳng đi qua M, N và lần lượt vuông góc với các mặt phẳng toạ độ.

b/ Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua M, N và vuông góc với mặt phẳng $3x + y + 2z - 1 = 0$.

44. Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh đều bằng d. Hãy tính:

1. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng B'C
2. Góc hợp bởi hai đường thẳng A'B và B'C
3. Thể tích tứ diện A'BB'C
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C
5. Diện tích thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng đi qua A'B' và trọng tâm G của tam giác ABC và tỉ số thể tích hai phần của khối lăng trụ chia bởi mặt phẳng đó.

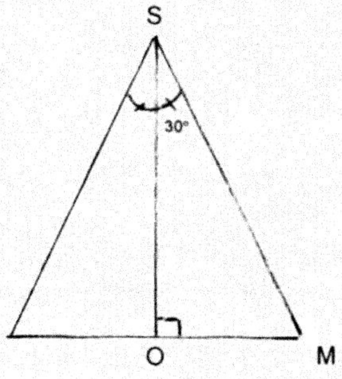
45. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng d và ba góc ở đỉnh A đều bằng 60°.

1. Tính độ dài các đường chéo của hình hộp
2. Tính thể tích V của khối hộp
3. Tính khoảng cách giữa hai mặt song song của hình hộp
4. Có thể cắt hình hộp bằng một mặt phẳng sao cho thiết diện nhận được là một hình vuông.

46. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm của CD và N là trung điểm của A'D'. Tính :

1. Thể tích khối tứ diện B'MC'N
2. Góc giữa hai đường thẳng B'M và C'N
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng B'M và C'N
4. Tỉ số thể tích hai phần của khối lập phương bị phân chia bởi mặt phẳng đi qua B',M,N.

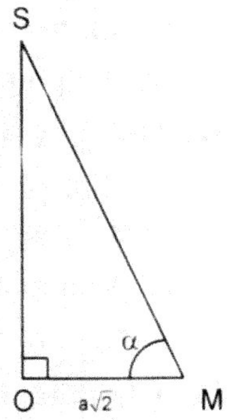
Hướng dẫn



1. Hình nón N có chiều cao $SO = 2h\sqrt{3}$, bán kính đáy

$OM = SO.\tan 30° = 2h\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = 2h$ và đường sinh

$$SM = \frac{SO}{\cos 30^\circ} = \frac{2h\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4h$$



$$\Rightarrow S_{xq} = \pi.OM.SM = \pi.2h.4h = 8\pi h^2.$$

2. Góc tạo bởi đường sinh SM và mặt đáy là:

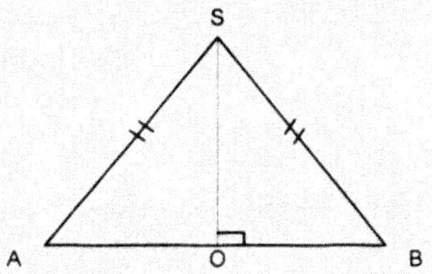
$\widehat{SMO} = \alpha$. Vậy hình nón N có:

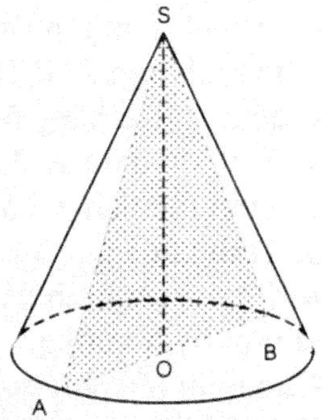
* Bán kính đáy: $R = OM = a\sqrt{2}$

* Chiều cao $h = SO = OM.\tan\alpha = a\sqrt{2}.\tan\alpha$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\pi R^2 h = \frac{1}{3}.\pi(a\sqrt{2})^2.a\sqrt{2}\tan\alpha = \frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}.\tan\alpha.$$

3.





Thiết diện SAB vuông cân ở S và có

đường cao $SO = \frac{3a}{2} \Rightarrow$ Hình nón N có: Bán kính đáy là

$R = OA = \frac{3a}{2}$. Chiều cao $h = SO = \frac{3a}{2}$. Đường sinh $l = SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón N là:

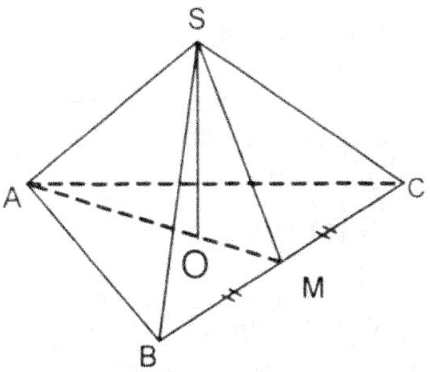
$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi.\frac{3a}{2}.\frac{3\sqrt{2}a}{2} + \pi.\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{9\pi a^2}{4}(1+\sqrt{2}).$$

4. Vẽ SO ⊥ (ABC), O là tâm của tam giác đều ABC

* Góc giữa cạnh bên SA và đáy (ABC) là $\widehat{SAO} = 60^\circ$

$$\Rightarrow SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^\circ = a$$

- Hình nón N ngoại tiếp S.ABC nên N có:

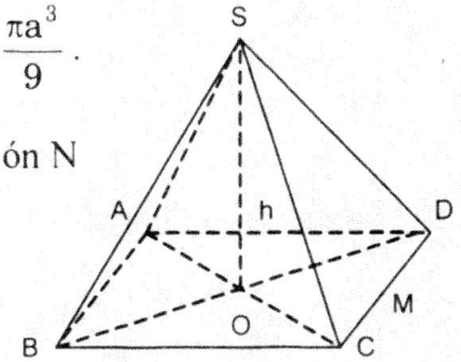


* Bán kính đáy $R = AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

(Đây cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

* Chiều cao h = SO = a

$$\Rightarrow V_{(nón)} = \frac{1}{3}.\pi R^2 h = \frac{1}{3}.\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{9}.$$



5. Hình nón N ngoại tiếp S.ABCD nên hình nón N có:

- Bán kính đáy :

  $R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{l^2 - h^2}$

(Đây cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABCD)

- Chiều cao h = SO

$$\Rightarrow V\ (nón) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{l^2 - h^2})^2.h = \frac{1}{3}\pi(l^2 - h^2)h.$$

6.

$\overrightarrow{AB} = (1;1;2);\ \overrightarrow{BC} = (-4;-1;-5);\ \overrightarrow{CA} = (3;0;3);\ \overrightarrow{CD} = (3;-3;0)$

$\Rightarrow \vec{x} = (\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC})\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{AB} = (-27;18;-9).$

7. a .Đường thẳng (d) qua $M_o = (12; 9; 1)$ có véctơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 3; 1)$. Mặt phẳng (α) có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5; -1)$. Suy ra $\vec{u}.\vec{n} = 4.3 + 3.5 + 1(-1) = 26 \neq 0$. Vậy đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (α).

b. Phương trình tham số của đường thẳng (d) là: $\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

thế hệ phương trình vào mặt phẳng(α) ta có:

$3(12 - 4t) + 5(9 + 3t) - 1 - t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 36 + 12t + 45 + 15t - 3 - t = 0$

$\Leftrightarrow 26t = -78 \Leftrightarrow t = -3$. Vậy tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) là: $I = (0;0;-2)$.

c. Mặt phẳng (α') qua M = (1; 2; –1) và vuông góc với đường thẳng (d) nên nhận $\vec{u}$ = (4; 3; 1) làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng (α') là: 4(x – 1) + 3(y – 2) + (z + 1) = 0

$\Leftrightarrow$ 4x + 3y + z – 9 = 0.

d. Phương trình mặt phẳng (β) chứa đường thẳng (d) lên mặt phẳng (α) là:

$$(x-12)\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{vmatrix} + (y-9)\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ 8x – 7y – 11 = 0

Vậy phương trình hình chiếu của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (α) là: $\begin{cases}8x - 7y - 11z - 22 = 0\\ 3x + 5y - z - 2 = 0\end{cases}$

8. Khoảng cách từ điểm M_1 = (1; –1; 1) tới đường thẳng

$\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{2}$ là: $d(M_1, d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_oM_1}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$

$M_o = (-2; 1; -1) \in (d)$; $\vec{u} = (1; 2; -2)$; $\overrightarrow{M_oM_1} = (3; 2; -2) \Rightarrow d(M_1, d) = \dfrac{8\sqrt{2}}{7}$.

9. Mặt phẳng trung trực của đoạn M_1M_2 là tập hợp các điểm M = (x; y; z) sao cho $MN_1 = MN_2$

$\Leftrightarrow$ $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2$

$\Leftrightarrow$ x – 2y + 2z + 3 = 0.

10.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|;\ \overrightarrow{AB} = (1; -1; 0);\ \overrightarrow{AC} = (4; -5; 1) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. Hình chiếu của đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$. Trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là giao điểm của mặt phẳng (α) chứa nó song song với Oz với mặt phẳng (Oxy). Mặt phẳng (α) đi qua điểm M_o = (1; –2; 3) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = (2; 3; 1); $\vec{v}$ = (0 ; 0; 1). Vậy phương trình mặt phẳng (α) là:

$$(x-1)\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} + (x-1)\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} + (y+2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ 3x – 2t – 7 = 0

Vậy phương trình hình chiếu của đường thẳng trên mặt phẳng đã cho là: $\begin{cases}3x - 2y - 7 = 0\\ z = 0\end{cases}$

12. Ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16 \Leftrightarrow R = 4$.

13. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến: $\vec{n} = (2; -1; 1)$, mặt phẳng (α') có vectơ pháp tuyến: $\vec{n}' = (1; 1; 2)$; $\vec{n}, \vec{n}'$ không cùng phương. Suy ra phương trình tổng quát của giao tuyến hai mặt phẳng là:

$$\begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Nên phương trình tham số của đường thẳng là $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - t \\ y = \dfrac{4}{3} - t \\ z = t \end{cases}$.

14.

$$\cos\varphi = \frac{|2.1 + (-1).1 + 1.2|}{\sqrt{2^2 + 1 + 1}\sqrt{^21 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60 \,.$$

15. Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (2; -1; 2)$; Vectơ pháp tuyến của (α') là $\vec{n}' = (1; 6; 2)$. Giao tuyến đường thẳng (Δ) của $(\alpha), (\alpha')$ là:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + 6y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Ta có: $M = \left(\dfrac{1}{13}; -\dfrac{11}{13}; 0\right)$; $N = \left(6; 0; -\dfrac{11}{2}\right)$ thuộc đường thẳng (Δ)

Suy ra phương trình mặt phẳng (β) qua O, M, N là: $11x + y + 12z = 0$.

16. Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là:

$\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{154}{26}; \dfrac{22}{26}; -\dfrac{143}{26}\right)$; $\vec{u} = (14; 2; -13)$. Vậy phương trình đường thẳng (d) có phương trình: $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{-13}$

17. Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_1 = (2; k; 3)$; Vectơ pháp tuyến của (α') là $\vec{n}_2' = (m; -6; -6)$. Để $(\alpha) // (\alpha')$ thì $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương. Hay $\dfrac{2}{m} = \dfrac{k}{-6} = \dfrac{3}{-6} \Rightarrow k = 3, m = -4$.

18. Lấy $M = \left(\frac{5}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow M \in (\alpha)$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α') là khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song (α) và (α') vì vectơ pháp tuyến của (α): $\vec{n}_1 = (2; 3; 3)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến của (α'): $\vec{n}_2 = (2; 3; 3)$ nên $(\alpha) // (\alpha')$. Suy ra:

$$d\left(M, (\alpha')\right) = \frac{\left|2.\frac{5}{2} - 1\right|}{\sqrt{x^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}.$$

19. Đặt z = t ta có phương trình tham số của đường thẳng (d)

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \\ y = \frac{1}{3} - t \\ z = t \end{cases} \qquad H \in (d) \Rightarrow H = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t;\ \frac{1}{3} - t;\ t\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t;\ -\frac{2}{3} - t;\ -1 + t\right)$ là véctơ chỉ phương của (d)

$\vec{u} = (-3; -2; 2)$; $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$

hay $-3\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t\right) - 2\left(-\frac{2}{3} - t\right) + 2(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{31}{51}$

Vậy tọa độ $H = \left(\frac{81}{51}; -\frac{14}{51}; \frac{31}{51}\right)$.

20. Phương trình mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Thế tọa độ A, B, C, D vào phương trình ta có:

$a = 2, b = -1, c = 3, d = -3$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$

21.

$$\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = 4\left(2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}\right) - \frac{1}{3}\left(2\vec{j} - \vec{k}\right) + 3\left(\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$

$$= 11\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + 18\frac{1}{3}\vec{k} \Rightarrow \vec{d} = \left(11;\ \frac{1}{3};\ 18\frac{1}{3}\right).$$

22.

M = (x; 0; z) ta có MA = MB = MC nên tọa độ M thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (0-1)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (0-1)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + (z-1)^2 + 1 = (x-3)^2 + (0-1)^2 + (z+1)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6},\ z = -\frac{7}{6}$. Vậy $M = \left(\frac{5}{6};\ 0;\ -\frac{7}{6}\right)$.

23. a. Phương trình tham số của d_1: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4t \end{cases} \Rightarrow M(0; -2; 0) \in d_1$ và

vectơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (2;\ 3;\ 4)$.Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{u_2} = (1;\ 1;\ 2)$ Do mp (P) // d_1 và d_2 nên có một vectơ pháp tuyến: $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (2;\ 0;\ -1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 (đi qua M) và song song với d_2 là: $2(x - 0) + 0(y + 2) - 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0$.

b. *Cách 1*:

$H \in d_2 \Rightarrow H(1 + t;\ 2 + t;\ 1 + 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (-1 + t;\ 1 + t;\ -3 + 2t)$

$\Rightarrow MH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11}$

$\Rightarrow \sqrt{6(t-1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$

MH đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{5}$ khi $t = 1 \Rightarrow H(2;\ 3;\ 3)$.

Cách 2: $H(1 + t;\ 2 + t;\ 1 + 2t) \in d_2$

MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2;\ 3;\ 3)$.

24. *Cách 1*:

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;\ -1;\ 0)$

Đường thẳng d_m có vectơ chỉ phương:

$\vec{u} = \big((1 + m)(2m + 1);\ -(2m + 1)^2;\ -m(1 - m)\big) \Rightarrow \vec{u}.\vec{n} = 3(2m + 1)$.

d_m // (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ d_m \not\subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ \exists A \in d_m,\ A \notin (P) \end{cases}$

Ta có: $\vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì đường thẳng d_m có phương trình $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Mọi điểm A(0; 1; a) của đường thẳng này đều không nằm trên mặt phẳng (P) nên $\exists A \notin (P)$. Vậy $m = -\frac{1}{2}$.

Cách 2: Viết phương trình đường thẳng d_m dưới dạng tham số:

$$d_m:\begin{cases} x = (1-m)(2m+1)t \\ y = 1-(2m+1)^2.t \\ z = -2-m(1-m).t \end{cases}$$

d_m // (P) ⇔ hệ phương trình: $\begin{cases} x = (1-m)(2m-1)t \\ y = 1-(2m+1)^2 t \\ z = -2-m(1-m)t \\ 2x-y+2 = 0 \end{cases}$ (I) vô nghiệm

⇔ Phương trình ẩn t là $3(2m+1)t+1=0$ vô nghiệm ⇔ $t = -\frac{1}{2}$

Cách 3: d_m // (P) ⇔ hệ phương trình ẩn x, y, z:

$\begin{cases} 2x-y+2=0 \\ (2m+1)x+(1-m)y+m-1=0 \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 \end{cases}$ vô nghiệm

Từ 2 phương trình đầu của hệ phương trình ta suy ra: $\begin{cases} x = \dfrac{m-1}{3} \\ y = \dfrac{2m+4}{3} \end{cases}$

Thế x, y vào phương trình thứ 3 của hệ phương trình ta được:

$(2m+1)z = -\frac{1}{3}(m^2+11m+6)$ hệ phương trình (I) vô nghiệm ⇔ $m = -\frac{1}{2}$.

25. a. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1;1)$. Đường thẳng d qua A và ⊥ mp(P) có phương trình: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{1}$

Gọi I là giao điểm của d và mp(P), khi đó tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y+z+3=0 \\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{1} \end{cases}$ ⇒ $I(-2;\ -2;\ -3)$.

A' là điểm đối xứng của A qua mp (P) ∈ d và I là trung điểm của AA'.
Do đó: A' có tọa độ $(x_0; y_0; z_0)$.

$$\Rightarrow \frac{-1+x_0}{2} = -2,\quad \frac{-3+y_0}{2} = -2,\quad \frac{-2+z_0}{2} = -3$$

⇒ $x_0 = -3$; $y_0 = -1$; $z_0 = -4$. Vậy A'(–3; –1; –4).

b. $\overrightarrow{BA'} = (2; -8; -16) = 2(1; -4; -8)$. Nên BA' có phương trình:

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+4}{-8}$$

Gọi M là giao điểm của BA' với mp(P) thì tọa độ của M là nghiệm của

hệ phương trình $\begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+4}{-8} \end{cases} \Rightarrow M(-4;\ 3;\ 4)$

Ta có:

MA + MB = MA' + MB = A'B ≤ M'A' + M'B' = M'A + M'B với M' là một điểm tùy ý thuộc mặt phẳng (P). Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA + MB là $A'B = \sqrt{2^2 + 8^2 + 16^2} = 18$ khi M là giao điểm của đường thẳng A'B với mặt phẳng (P).

26. a. d_1 và d_2 cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - az - a = 0 \\ y - z + 1 = 0 \\ ax + 3y - 3 = 0 \\ x - 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

Khử x, y, z trong hệ phương trình ta được: $a^2 - 3a + 12 = 0$. Do

$\Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm hay không tồn tại a để d_1 cắt d_2.

b. Với a = 2 ta có:

$$d_1: \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}; \quad d_2: \begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ x + 3z - 6 = 0 \end{cases}.$$

- Mặt phẳng (P) chứa d_2 nên có phương trình:

  $\lambda(2x + 3y - 3) + \mu(x + 3z - 6) = 0$

  $\Leftrightarrow (2\lambda + \mu)x + 3\lambda y + 3\mu z - (3\lambda + 6\mu) = 0$

  Vậy mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (2\lambda + \mu; 3\lambda; 3\mu)$

  Trong phương trình d_1 đặt: x = 2t ta có: z = t – 1, y = t – 2.

  Do đó vectơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{n_1} = (2;\ 1;\ 1)$ vì (P) // d_1 nên

  $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow 2.(2\lambda + \mu) + 1.3\lambda + 1.3\mu = 0 \Leftrightarrow 7\lambda + 5\mu = 0$

  Chọn $\lambda = 5$ ta được $\mu = -7$. Thế vào phương trình mặt phẳng (P) ta được phương trình của mặt phẳng (P) cần tìm là:

  3x + 15y – 21z + 27 = 0 Hay x + 5y – 7z + 9 = 0.

- Mặt phẳng (P) chứa d_2 và mặt phẳng (P) // d_1 nên khoảng cách giữa d_1, d_2 là khoảng cách từ một điểm của d_1 đến mặt phẳng (P). Ở trên cho t = 0 ta được điểm M(0; –2; –1) thuộc d_1. Vậy khoảng cách cần tìm là:

$$d = \frac{|0 + 5.(-2) - 7.(-1) + 9|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{6}{\sqrt{75}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

27. Viết lại phương trình mặt cầu (S): $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 13 - m$ (điều kiện $m < 13$). Mặt cầu (S) có tâm I(–2; 3; 0), bán kính $\sqrt{13 - m} = IN$; MN = 8 nên HN = 4. Suy ra:

$$IH = \sqrt{IN^2 - HN^2} = \sqrt{13 - m - 4^2} = \sqrt{-m - 3}.$$

(điều kiện $m < -3$) là khoảng cách từ I đến đường thẳng d.

Trong phương trình xác định d, đặt x = t ta được:

$$\begin{cases} 2y + z = 2t + 1 \\ 2y - 2z = -t + 4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}t + 1;\ z = t = -1.$$

Vậy d có vectơ chỉ phương

$$\vec{n} = \left(1;\ \frac{1}{2};\ 1\right) = \frac{1}{2}(2;\ 1;\ 2) \text{ hay } \overrightarrow{n_d} = (2;\ 1;\ 2)$$

Dễ nhận thấy rằng $M_0(0; 1; -1)$ là một điểm của d. Do đó khoảng cách I đến d bằng

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0I}, \vec{n}\right]\right|}{|\vec{n}|};\left[\overrightarrow{M_0I}, \vec{n}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (3;\ 6;\ -6).$$

$$IH = h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0I}, \vec{n}\right]\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.$$

Vậy $IH = \sqrt{-m - 3} = 3 \Rightarrow -m - 3 = 9 \Rightarrow m = -12$ (thỏa điều kiện).

28. a. $\overrightarrow{AB} = (4; -4; -4) = 4(1; -1; -1)$

$\overrightarrow{CD} = (2; 10; 8) = 2(1; 5; -4)$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD, ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|1.1 - 1.5 - 1.(-4)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0.$$

b. Ta có: $AC = \sqrt{3^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{59}$. $AD = \sqrt{1^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{59}$

$\Rightarrow \Delta ACD$ cân tại A.

$BC = \sqrt{7^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{83}$, $BD = \sqrt{5^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{83}$

$\Rightarrow \Delta BCD$ cân tại B.

Từ đó gọi M là trung điểm của CD ta có $AM \perp CD$, $BM \perp CD$. Do đó chu vi ΔABM là $p = AB + AM + BM$ nhỏ nhất khi $AM + BM$ nhỏ nhất (vì AB không thay đổi), tức là khi M là trung điểm của CD hay $M(0; 1; -1)$.

29.a. Đường thẳng d qua điểm (12; 9; 1) có vectơ chỉ phương:

$\overrightarrow{u_d} = (4;\ 3;\ 1)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = (3; 5; -1)$

Vậy: $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_p} = 4.3 + 3.5 + 1.(-1) = 26 \neq 0 \Rightarrow$ d cắt (P).

Gọi A là giao điểm của d với mặt phẳng (P), tọa độ điểm A(x; y; z) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \\ 3x - 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -3 \Rightarrow A(0; 0; -2).$$

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta có:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_p}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_p}\right|} = \frac{26}{\sqrt{26}.\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}.$$

b. Mặt phẳng (P') vuông góc với d nên có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của d suy ra mặt phẳng (P') có phương trình:

$4(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + z - 9 = 0.$

c. Hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (P) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), với mặt phẳng (Q) đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (P). Như vậy, mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_p}\right]$ hay

$$\overrightarrow{n_Q} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-8;\ 7;\ 11)$$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là:

$-8(x - 12) + 7(y - 9) + 11(z - 1) = 0$ hay $8x - 7y - 11z - 22 = 0$

Khi đó phương trình tổng quát của d' là: $\begin{cases} 3x + 5y - z - 2 = 0 \\ 8x - 7y - 11z - 22 = 0. \end{cases}$

d. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của BB' $\Leftrightarrow$ B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (P).

Ta có phương trình đường thẳng BB' là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Gọi H là giao điểm của BB' với mặt phẳng (P) $\Rightarrow$ tọa độ H(x; y; z) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{2}{35} \Rightarrow H\left(\frac{29}{35}; -\frac{2}{7}; -\frac{33}{35}\right).$$

H là trung điểm của BB' nên:

$$\begin{cases} x_{B'} = 2x_H - x_B = \frac{23}{35} \\ y_{B'} = 2y_H - y_B = \frac{-4}{7} \\ z_{B'} = 2z_H - z_B = \frac{-31}{35} \end{cases} \Rightarrow B' = \left(\frac{23}{35}; -\frac{4}{7}; -\frac{31}{35}\right).$$

e. Đường thẳng d_1 phải tìm nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời nằm trong mặt phẳng (R) qua A(0; 0; –2) và vuông góc với d, mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_R}(4; 3; 1) \Rightarrow (R) : 4x + 3y + z + 2 = 0$

Vậy phương trình tổng quát của d_1 là: $\begin{cases} 3x + 5y - z - 2 = 0 \\ 4x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$

30. a. Ta có: $\overrightarrow{n_\alpha}(2; -1; 3)$, $\overrightarrow{n_{\alpha'}}(1; -1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_{\alpha'}}$ không cùng phương.

$\Rightarrow$ hai mặt phẳng cắt nhau. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right|} = \frac{|2.1 + (-1)(-1) + 3.1|}{\sqrt{4+1+9}.\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{14}.\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

b. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α'). Phương trình tổng quát của d là: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$

Đặt: $z = t \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 - 3t \\ x - y = -5 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t \end{cases}$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t \\ z = t \end{cases}$

c. Gọi H(x; y; z) là hình chiếu của M trên (α).

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 + 3t \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{9}{7} \Rightarrow H\left(-\frac{11}{7};\ \frac{9}{7};\ \frac{8}{7}\right).$$

Gọi K là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α). Tọa độ K(x; y; z) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 + t \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{11}{3} \Rightarrow K\left(-\frac{8}{3};\ \frac{11}{3};\ \frac{4}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } HK = \sqrt{\left(-\frac{8}{3} + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{23}{21}\right)^2 + \left(\frac{50}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{3045}}{21}.$$

d. d là đường thẳng đi qua $M_0(4; 9; 0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (-2; -1; 1)$:

$\overrightarrow{M_0M} = (-3;\ -9;\ 5)$.

$$\left[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u_d}\right] = \left(\begin{vmatrix} -9 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-4;\ -7;\ -15).$$

$$\Rightarrow d(M,\ d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-7)^2 + (-15)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{290}}{\sqrt{6}}.$$

e. Gọi (β) là mặt phẳng qua M và vuông góc với d.

$\Rightarrow$ (β): $-2(x - 1) - 1(y - 0) + 1(z - 5) = 0$

(β): $2x + y - z + 3 = 0$

Gọi J(x; y; z) là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (β). Tọa độ điểm J là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 9 - t \\ z = t \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{10}{3} \Rightarrow J\left(-\frac{8}{3};\ \frac{17}{3};\ \frac{10}{3}\right).$$

M J chính là đường thẳng qua M, vuông góc và cắt đường thẳng d:

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z-5}{5}.$$

g. Gọi (R) là mặt phẳng qua d (giao tuyến của (α) và (α')) và vuông góc với mặt phẳng (P): $3x - y + 1 = 0$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_p} = (3; -1; 0)$

Khi đó mặt phẳng (R) qua điểm $M_0(4; 9; 0)$ và có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_p}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right) = (1;\ 3;\ 5).$$

⇒ mặt phẳng (R) có phương trình: $1(x-4) + 3(y-9) + 5(z-0) = 0$ hay $x + 3y + 5z - 31 = 0$.

31. a. Đường thẳng d qua $N_0(3; -1; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 0)$.

Đường thẳng d' qua $N_0'(-2;\ 0;\ 2)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u'} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (2;\ 2;\ 4).$$

Suy ra $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (8; -4; -2)$.

$\overrightarrow{N_0N_0'} = (-5; 1; -2) \Rightarrow \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{N_0N_0'} = 8(-5) + (-4).1 - 2(-2) = -40 \neq 0$.

Vậy d và d' chéo nhau.

b. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d' và song song với d, khi đó mặt phẳng (P) qua điểm $N_0'(-2; 0; 2) \in$ d' và có vectơ pháp tuyến:

$\overrightarrow{n_p} = \frac{1}{2}\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (4; -2; -1)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:

$4(x+2) - 2(y-0) - 1(z-2) = 0$ hay $4x - 2y - z + 10 = 0$.

c. Gọi (Q) là mặt phẳng qua $M_0(1; 1; 2)$ và vuông góc với d ⇒ mặt phẳng (Q) nhận vectơ $\vec{u} = (1; 2; 0)$ là vectơ pháp tuyến ⇒ mặt phẳng (Q) có phương trình: $1(x-1) + 2(y-1) = 0$ hay $x + 2y - 3 = 0$

d. Gọi d_1 là đường thẳng qua M_0, cắt d và d', khi đó d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) chứa (M_0, d) và (α') chứa (M_0, d'), mặt phẳng (α) qua $M_0(1; 1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{M_0N_0}, \vec{u}\right]$

$\overrightarrow{M_0N_0} = (2; -2; 2);$ $\qquad\qquad$ $\vec{u} = (1;\ 2;\ 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \left(\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right) = (-4;\ 2;\ 6)$$

$\Rightarrow (\alpha): -4(x-1) + 2(y-1) + 6(z-0) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 3z + 1 = 0.$

(α') qua $M_0(1; 1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{\alpha'}} = \left[\overrightarrow{M_0N_0'}, \overrightarrow{u'}\right]$

$\overrightarrow{M_0N_0'} = (-3;\ -1;\ 0)$, $\overrightarrow{u'}(2;\ 2;\ 4)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{M_0N_0'}, \vec{u}'\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right) = (-4; 12; -4).$$

Ta chọn $\overrightarrow{n_{\alpha'}} = (1; -3; 1)$

$\Rightarrow (\alpha'): 1(x-1) - 3(y-1) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + z + 2 = 0.$

Dễ thấy rằng đường thẳng d_1 có phương trình:

$\begin{cases} -2x + y + 3z + 1 = 0 \\ x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ thỏa mãn bài toán.

e. $$d(d, d') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{N_0N_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right|} = \frac{20}{\sqrt{21}}.$$

g. Gọi đường thẳng vuông góc chung của d và d' là δ. Khi đó vectơ chỉ phương của δ là $\overrightarrow{u_\delta} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (8; -4; -2)$

Gọi $(\beta_1) = (d, \delta) \Rightarrow (\beta_1)$ đi qua N_0 và có vectơ pháp tuyến:

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u_\delta}\right] \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (-4;\ 2; -20)$

$\Rightarrow (\beta_1): -4(x-3) + 2(y+1) - 20(z-4) = 0$ hay $2x - y + 10z - 47 = 0.$

Gọi $(\beta_2) = (d', \delta) \Rightarrow (\beta_2)$ đi qua N_0' và có vectơ pháp tuyến:

$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u_\delta}\right] \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (12;\ 36; -24)$. Lấy $\overrightarrow{n_2} = (1;\ 3; -2)$ là vectơ pháp tuyến của $(\beta_2) \Rightarrow (\beta_2): x + 3y - 2z + 6 = 0.$

Vậy phương trình đường vuông góc chung δ của d và d' là:

$$\begin{cases} 2x - y + 10z - 47 = 0 \\ x + 3y - 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

32. a. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;\ 3;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (7;\ 0;-9)$, $\overrightarrow{AD} = (0;\ 7;-9)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-27; -3; -21)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -21 + 189 = 168 \neq 0$$

$\Rightarrow$ A, B, C, D là các đỉnh của một tứ diện.

b. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{6}.168 = 28.$

c. Gọi I(x; y; z) là tâm cầu ngoại tiếp tứ diện, ta có hệ:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow \text{tâm } I(-2;\ 1;\ -5) \text{ và } R = IA = 7.$$

Vậy mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD có phương trình:

$(S): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$

d. Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d và mặt cầu (S) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3t - 3)^2 + (5t - 12)^2 + (-4t + 14)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{array}\right.$$

* Khi $t = 2 \Rightarrow x = 1; y = -1; z = 1 \Rightarrow$ điểm M(1; –1; 1).

* Khi $t = 3 \Rightarrow x = 4; y = 4; z = -7 \Rightarrow$ điểm N(4; 4; –7).

Vậy đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm M(1; –1; 1) và N(4; 4; – 7).

c. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M $\Rightarrow$ mặt phẳng (P) qua điểm M(1;–1; 1) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IM} = (3; -2;\ 6)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là:

$3(x - 1) - 2(y + 1) + 6(z - 1) = 0$ hay $3x - 2y + 6z - 11 = 0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N $\Rightarrow$ mặt phẳng (Q) qua điểm N(4; 4; –7) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{IN} = (6; 3; -2)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (Q) là:

$6(x - 4) + 3(y - 4) - 2(z + 7) = 0$ hay $6x + 3y - 2z - 50 = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có

$\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q} = 3.6 + (-2).3 + 6.(-2) = 0$. Nên $\varphi = 90^0$ hay (P) $\perp$ (Q).

33. a. Ta chọn hệ trục tọa độ có gốc là đỉnh A, trục Ox chứa AB, trục Oy chứa AD và trục Oz chứa AA'. Ta có:

A(0; 0; 0); A'(0; 0; a); B(a; 0; 0); B'(a; 0; a); D(0; a; 0); D'(0; a; a);
C(a; a; 0); C'(a; a; a)

$$P\left(a;\ \frac{a}{2};\ a\right) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \left(a;\ \frac{a}{2};\ a\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = (0;\ a;\ a)$$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AP và BC' ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|0 + \frac{a^2}{2} + a^2\right|}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2}.\sqrt{\sqrt{a^2 + a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

b. Ta có: $\overrightarrow{AP} = (a;\ \frac{a}{2};\ a)$, $\overrightarrow{AB} = (a;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{AC'} = (a;\ a;\ a)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & a\\ 0 & 0\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}a & a\\ 0 & a\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}a & \frac{a}{2}\\ a & 0\end{vmatrix}\right) = \left(0;\ a^2;\ -\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right]\overrightarrow{AC'} = 0 + a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}$$

Vậy $V_{APBC'} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC'}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{12}$.

c. Mặt phẳng (A'D'CB) song song với trục Oy nên có phương trình: $px + qz + n = 0$ ($n \neq 0$, $p^2 + q^2 > 0$). Vì mặt phẳng này đi qua A', B, C

nên ta xác định được p = q và n = –pa, Cho p = 1 ta được phương trình mặt phẳng (A'D'CB) là x + z – a = 0

⇒ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này là: $\vec{n} = (1;\ 0;\ 1)$.

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}};\ \frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}};\ -\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{n} = 1.\frac{k}{\sqrt{2}} + 0\left(\frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\right) + 1.\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \vec{n}$$

Rõ ràng N ∉ mp(A'D'CB). Suy ra MN song song với mp(A'D'CB).

d. Theo giả thiết M ∈ AD'; N ∈ DB; AM = DN = k

$$\Rightarrow M\left(0;\ \frac{k}{\sqrt{2}};\ \frac{k}{\sqrt{2}}\right),\ N\left(\frac{k}{\sqrt{2}};\frac{a\sqrt{2} - k}{\sqrt{2}};\ 0\right)$$

$$\text{Vậy } MN^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - 0\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2} - k}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(0 - \frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 3k^2 - 2a\sqrt{2}\,k + a^2 \qquad \text{với } 0 < k < a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MN^2 = 3\left[\left(k - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{9}\right] \geq \frac{a^2}{3}.$$

MN^2 nhỏ nhất bằng $\frac{a^2}{3}$ khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Vậy MN nhỏ nhất bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$ khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

e. Khi MN ngắn nhất thì $k = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{3};\ \frac{a}{3};\ \frac{-a}{3}\right)$.

Ta lại có: $\overrightarrow{AD'} = (0;\ a;\ a)$, $\overrightarrow{DB} = (a;\ -a;\ 0)$ $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\ \overrightarrow{AD'} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\ \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$

⇒ MN là đường vuông góc chung của AD' và DB.

Mặt khác: $\overrightarrow{A'C} = (a; a; -a) = 3\overrightarrow{MN}$, chứng tỏ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{A'C}$ cùng phương.

Do N ∈ A'C, vậy MN // A'C.

34. 1. *Cách 1.* Trong mặt phẳng (SAC), hạ HI ⊥ AC.

Suy ra:

HI ⊥ (ABC). Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HI$.

Ta có: $CA = AB\cos 30° = a\sqrt{3}$.

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 30° = \frac{1}{2}.2a.2a.\cos 30°.\sin 30°$

$= a^2\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$\frac{HI}{SA} = \frac{HC}{SC} = \frac{HC.SC}{SC^2} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{4a^2\cos 30°}{4a^2 + 4a^2 + \cos^2 30°} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow HI = \frac{6}{7}a;\ V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}HI = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{6}{7}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{7}.$$

Cách 2. $V_{H.ABC} = V_{B.AHC} = \frac{1}{3}S_{AHC}.BC$

2. Ta có: AH ⊥ SC, AH ⊥ CB (do CB ⊥ (SAO)), suy ra AH ⊥ (SBC) ⇒ AH ⊥ SB.

Ta có: SB ⊥ AK, SB ⊥ AH (do AH ⊥ (SBC)) suy ra SB ⊥ (AHK).

3. Tam giác SAB cân tại A nên $SK = \frac{1}{2}SB$.

Cách 1. $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SC}.\frac{SK}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{SH.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SA^2 + SC^2}$

$= \frac{1}{2}\frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2\cos 30°} = \frac{2}{7}$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{S.AHK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.\frac{2}{7} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{21}$.

Cách 2. $V_{S.AHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.SK$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có thể tính dễ dàng AH, HK và SH. Từ đó ta tính được thể tích khối chóp S.AHK.

35. 1. Ta có: $V_{C.A'AB} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.AA' = \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3$

2. Ta có CB ⊥ AB, CB ⊥ AA′ (do AA′ ⊥ (ABC)), suy ra CB ⊥ (A′AB). Mặt khác AN ⊥ CA′ (do CA′ ⊥ (AMN)) suy ra AN ⊥ A′B (định lí ba đường vuông góc).

3. Ta có: $V_{A'.AMN} = V_{M.AA'N} = V_{M.AA'B}$ (vì NB // AA′)

$$= V_{C.AA'B}(\text{do } MC \ // \ (AA'B)) = a^3.$$

4. $$S_{AMN} = \frac{3V_{A'.AMN}}{A'I} = \frac{3.a^3}{\dfrac{(3a)^2}{\sqrt{a^2+(2a)^2+(3a)^2}}} = \frac{a^2\sqrt{14}}{3}.$$

36. Kẻ SH là đường cao của hình chóp thì H là trung điểm AB (h.71). Gọi I là tâm của hình vuông ABCD, J là trọng tâm tam giác SAB, và O là điểm sao cho JOIH là hình chữ nhật. Khi đó OS = OA = OB (vì OJ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB) và OA = OB = OC = OD (vì OI là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD). Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp R = OA. Ta có:

$$OA^2 = AI^2 + OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{7a^2}{12} \text{ Vậy } R = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

37. 1. Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$S_1 = 2\pi.R.R\sqrt{3} = 2.\sqrt{3}.\pi R^2$. Lấy một đường sinh O′M của hình nón thì $O'M = \sqrt{O'M^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_2 = \pi R.2R = 2\pi R^2. \text{ Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}.$$

2. Khối trụ và khối nón có cùng đáy và cùng chiều cao nên thể tích khối trụ bằng ba lần thể tích khối nón. Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần: khối nón, và phần còn lại có thể tích bằng hai lần thể tích khối nón. Vậy tỉ số hai phần đó là $\frac{1}{2}$.

38.a/ Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;0;1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2;-2;-5)$

Rõ ràng là hai véctơ đó không cùng phương, vậy ba điểm M_1 ; M_2 ; M_3 không thẳng hàng.

Diện tích S của tam giác $M_1M_2M_3$ có thể tính theo công thức $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right|$

Ta có $\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\right) = (2; 3; -2)$

Vậy $S = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

b/ Gọi V là thể tích tứ diện $OM_1M_2M_3$ thì

$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right].\overrightarrow{OM_3}\right|$. Ta có $\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right] = (1; -1; -1)$

$\left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right].\overrightarrow{OM_3} = 0 + 1 + 4 = 5$. Vậy $V = \frac{5}{6}$

c/ Vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = (2; 3; -2)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Vậy (α) có phương trình:

$$2(x-2) + 3(y-1) - 2(z-1) = 0 \text{ .Hay } 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

d/ Ta có $\overrightarrow{M_2M_3} = (-3; -2; -6)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (β). Vậy (β) có phương trình

$$-3(x-2) - 2(y-1) - 6(z-1) = 0 \text{ hay } 3x + 2y + 6z - 14 = 0$$

e/ Mặt phẳng (γ) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 0; 1)$ và $\overrightarrow{OM_3} = (0; -1; -4)$ nên có véctơ pháp tuyến

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{OM_3}\right] = (1; 4; -1)$. Vậy (γ) có phương trình

$$1(x-2) + 4(y-1) - 1(z-1) = 0 \text{ hay } x + 4y - z - 5 = 03$$

39. a/ Giả sử $A = (a; 0; 0)$; $B = (0; b; 0)$; $C = (0; 0; c)$.

Khi đó vì M là trọng tâm tam giác ABC nên $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Từ đó suy ra $a = 3$; $b = 6$ và .

Vậy (α) có phương trình $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$

b/ Nếu M là trực tâm tam giác PRQ thì $OM \perp mp(P, R, Q)$ hay $OM \perp (\beta)$. Như vậy (β) là mặt phẳng đi qua $M(1; 2; 3)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 3)$. Vậy (β) có phương trình:

$$1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \text{ hay } x+2y+3z-14=0$$

c/ Giả sử $D=(d;0;0)$, $E=(0;e;0)$, $F=(0;0;f)$ với $d>0$, $e>0$, $f>0$.

Khi đó (γ) có phương trình : $\frac{x}{d}+\frac{y}{e}+\frac{z}{f}=1$

Vì M nằm trên (γ) nên : $\frac{1}{d}+\frac{2}{e}+\frac{3}{f}=1$

Theo bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

$$1=\frac{1}{d}+\frac{2}{e}+\frac{3}{f}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{d}.\frac{2}{e}.\frac{3}{f}}=3\sqrt[3]{\frac{6}{def}}$$

hay là $1\geq\frac{27,6}{def}\Leftrightarrow\frac{def}{6}\geq 27$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{d}=\frac{2}{e}=\frac{3}{f}$ hay d = 3; e = 6; f = 9.

Thể tích V của tứ diện ODEF là $V=\frac{1}{6}OD.OE.OF=\frac{def}{6}\geq 27$

Vậy thể tích nhỏ nhất là 27. Khi đó phương trình mặt phẳng (γ) là:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$$

Chính là mặt phẳng (α) trong câu a.

40. a/ Giả sử mặt phẳng (α) có phương trình

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Vì (α) đi qua M_1 và M_2 nên

$$\begin{cases}A+C+D=0\\2A-B+D=0\end{cases}$$

Từ đó suy ra: $C=A-B$ và $D=-2A+B$

Vì khoảng cách từ M_3 tới (α) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\frac{|C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow|A|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{A^2+B^2+(A-B)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2A^2=A^2+B^2+A^2+B^2-2AB\Leftrightarrow 2B(B-A)=0$$

+) Nếu B = 0 thì C = A, D = −2A.
Ta lấy A = 1 thì phương trình (α) là $x+z-2=0$.

+) Nếu B = A thì C = 0 và D = −A.
Ta lấy A = 1 thì phương trình (α) là $x+z-1=0$.

b/ Mặt phẳng (β) đi qua $M_3(0;0;1)$ nên có phương trình

$A(x-0)+B(y-0)+C(z-1)=0$ hay $Ax+By+Cz-C=0$

Khoảng cách từ M_1, M_2 tới (β) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\frac{|A+C-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2A-B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Từ đó ta có: $|A|=|2A-B-C|$ hay $\pm A=2A-B-C$

Suy ra: hoặc $C=A-B$ hoặc $C=3A-B$

+) Với $C=A-B$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2=A^2+B^2+(A-B)^2 \Leftrightarrow 2B(B-A)=0$$

* Nếu B = 0 thì C = A, ta lấy A = 1 thì (β) có phương trình:

$x+z-1=0$.

* Nếu A = B thì C = 0, ta lấy A = 1 thì (β) có phương trình: $x+y=0$.

+) Với $C=3A-B$ thì từ $\frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra

$$2A^2=A^2+B^2+(3A-B)^2 \Leftrightarrow 8A^2-6AB+2B^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4A^2-3AB+B^2=0 \Leftrightarrow \left(2A-\frac{3}{4}B\right)^2+\frac{7B^2}{16}=0$$

Như vậy $2A-\frac{3}{4}B=0$ và B = 0, tức là A = 0, B = 0 và do đó C = 0.

Không xảy ra trường hợp này.

41. a/ Đường thẳng Δ đi qua điểm $I(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-2)$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $I'(2;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}=(1;-1;0)$

Ta có $\overrightarrow{II'}=(1;-1;3)$, $[\vec{u},\vec{u'}]=(2;2;2)$

Bởi vậy $[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{II'}=1.2+(-1).2+3.2=6\neq 0$

Điều đó chứng tỏ ba vectơ $\vec{u'}$, $\vec{u}$, $\overrightarrow{II'}$ không đồng phẳng và do đó Δ và Δ' chéo nhau.

b/ Mỗi điểm M trên Δ có toạ độ $(1+t;2+t;-2-2t)$, mỗi điểm M' trên Δ' có toạ độ $(2+t';1-t';1)$.

Như vậy $\overrightarrow{MM'}=(1+t'-t;-1-t'-t;3+2t)$.

Ta cần tìm M và M' sao cho đường thẳng MM' vuông góc với cả Δ và Δ', tức là $\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0$, $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u'} = 0$. Vậy

$$\begin{cases} 1(1 + t' - t) + 1(-1 - t' - t) - 2(3 + 2t) = 0 \\ 1(1 + t' - t) - 1(-1 - t' - t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 - 6t = 0 \\ 2 + 2t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = -1$$

Vậy $M = (0;1;0)$, $M' = (1;2;1)$.

Đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ và Δ' là đường thẳng MM' nên có phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

c/ Khoảng cách giữa Δ và Δ' là độ dài đoạn thẳng MM'.

Vậy $MM' = \sqrt{1^2 + (2-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

42. a/ Đường thẳng Δ_m là giao tuyến của hai mặt phẳng cho bởi phương trình (1) và (2). Hai mặt phẳng đó có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (1;-m;1)$ và $\overrightarrow{n_2} = (m;1;-m)$. Bởi vậy Δ_m có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_m}$ là:

$$\overrightarrow{u_m} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -m & m \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(m^2 - 1; 2m; m^2 + 1\right)$$

Gọi φ là góc hợp bởi Δ_m và trục Oz thì

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{u_m}.\vec{j}\right|}{\left|\overrightarrow{u_m}\right|.\left|\vec{j}\right|} = \frac{m^2 + 1}{\sqrt{(m^2 - 1)^2 + 4m^2 + (m^2 + 1)^2}}$$

$$= \frac{m^2 + 1}{\sqrt{2m^4 + 4m^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \varphi = 45°$. Vậy φ không phụ thuộc vào m và $\varphi = 45°$.

b/ Toạ độ giao điểm P của Δ_m và mặt phẳng z = 0 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - my - m = 0 \\ mx + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Như vậy điểm P có toạ độ: $x_P = \frac{2m}{1+m^2}$; $y_P = \frac{1-m^2}{1+m^2}$; $z_P = 0$

Nhận xét rằng: $x_P^2 + y_P^2 = \frac{4m^2}{(1+m^2)^2} + \frac{(1-m^2)^2}{(1+m^2)^2} = \frac{(1+m^2)^2}{(1+m^2)^2} = 1$

Như vậy quỹ tích giao điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nằm trong mặt phẳng $z = 0$.

Toạ độ giao điểm Q của Δ_m và mặt phẳng x = 0 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -my + z - m = 0 \\ y - mz - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+m^2}{1-m^2} & (m^2 \neq 1) \\ z = \frac{2m}{1-m^2} & (m^2 \neq 1) \\ x = 0 \end{cases}$$

(Khi $m^2 = 1$, tức $m = \pm 1$, đường thẳng Δ_m không cắt mặt phẳng x = 0)

Như vậy toạ độ của Q là

$$x_Q = 0\ ,\ y_Q = \frac{1+m^2}{1-m^2}\ ,\ z_Q = \frac{2m}{1-m^2}$$

Chú ý rằng $y_Q{}^2 - z_Q{}^2 = \frac{(1+m^2)^2 - 4m^2}{(1-m^2)^2} = \frac{(1-m^2)^2}{(1-m^2)^2} = 1$

Vậy quỹ tích của Q là hypebol $y^2 - z^2 = 1$ nằm trong mặt phẳng x = 0.

Toạ độ giao điểm R của Δ_m và mặt phẳng y = 0 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx + y - mz - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - m = 0 \\ mx - mz - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2+1}{2m} \\ y = 0 \\ z = \frac{m^2-1}{2m} \end{cases} \quad (m \neq 0)$$

(Khi m = 0 đường thẳng Δ_m không cắt mặt phẳng y = 0). Như vậy toạ độ điểm R là: $x_R = \frac{m^2+1}{2m}$; $y_R = 0$; $z_R = \frac{m^2-1}{2m}$

Chú ý rằng $x_R{}^2 - z_R{}^2 = \frac{(m^2+1)^2 - (m^2-1)^2}{4m^2} = 1$

Vậy quỹ tích của R là hypebol $x^2 - z^2 = 1$ nằm trong mặt phẳng y = 0.

c/ Đường thẳng Δ_m đi qua M có toạ độ $M=\left(\frac{2m}{1+m^2};\frac{1-m^2}{1+m^2};0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_m}=(m^2-1;2m;m^2+1)$.

Đường thẳng Oz đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{j}=(0;0;1)$. Ta có $\left[\overrightarrow{u_m},\vec{j}\right]=(2m;1-m^2;0)$

$\left[\overrightarrow{u_m},\vec{j}\right].\overrightarrow{OM}=\frac{4m^2}{1+m^2}+\frac{1-m^2}{1+m^2}=1+m^2\neq 0$. Vậy Δ_m và Oz chéo nhau.

Gọi d là khoảng cách giữa chúng thì:

$$d=\frac{\left|[\overrightarrow{u_m},\vec{j}].\overrightarrow{OM}\right|}{\left|[\overrightarrow{u_m},\vec{j}]\right|}=\frac{1+m^2}{\sqrt{4m^2+(1-m^2)^2}}=1$$

Vậy d không đổi.

43. a/ - Mặt phẳng (α_1) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ Oxy $\Rightarrow(\alpha_1)//Oz\ \Rightarrow(\alpha_1)$ có dạng $Ax+By+D=0$. Do (α_1) đi qua $M(1;2;-2)$ và $N(2;0;-2)$ ta có hệ:

$$\begin{cases}A+2B+D=0\\2A+D=0\end{cases}\quad\text{hay}\quad\begin{cases}A=2B\\D=-4B\end{cases}\quad\text{lấy } B=1$$

Vậy (α_1) có phương trình $2x+y-4=0$

- Mặt phẳng (α_2) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ $Oyz\Rightarrow(\alpha_2)//Ox\ \Rightarrow(\alpha_2)$ có dạng $By+Cz+D=0\Rightarrow$

$$\begin{cases}2B-2C+D=0\\-2C+D=0\end{cases}\quad\text{hay}\quad\begin{cases}B=0\\D=2C\end{cases}\quad\text{lấy } C=1 \text{ có } D=2$$

Vậy ta có (α_2) có phương trình $z+2=0$.

- Mặt phẳng (α_3) qua M, N vuông góc với mặt phẳng toạ độ $Ozx\Rightarrow(\alpha_3)//Oy\ \Rightarrow(\alpha_3)$ có dạng $Ax+Cz+D=0$. Đồng thời có thể hiểu (α_3) thuộc chùm mặt phẳng qua M, N nên

$$Ax+Cz+D=\lambda(2x+y-4)+\mu(z+2)\qquad(\lambda^2+\mu^2\neq 0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=2\lambda\\0=B=\lambda\\C=\mu\\D=-4\lambda+2\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=B=0\\C=\mu\\D=2\mu\end{cases}\quad\text{cho } \mu=1$$

Vậy (α_3) có phương trình: $z+2=0$.

b/ Mặt phẳng (α) đi qua M, N nên thuộc vào chùm mặt phẳng qua đường thẳng MN, theo câu a, ta suy ra (α) có dạng:

$$\lambda(2x + y - 4) + \mu(z + 2)=0 \qquad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

hay $2\lambda x + \lambda y + \mu z - 4\lambda + 2\mu = 0$

Do mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x + y + 2z - 1 = 0$ nên vectơ pháp tuyến của (α) vuông góc với vectơ pháp tuyến của $(P) \Leftrightarrow$ vectơ $(2\lambda;\lambda;\mu) \perp$ vectơ $(3;1;2)$, nghĩa là tích vô hướng của chúng bằng $0 \Leftrightarrow 6\lambda + \lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow 2\mu = -7\lambda$. Lấy $\lambda = 2$; có $\mu = -7$.

Vậy (α) có phương trình $4x + 2y - 7z - 22 = 0$.

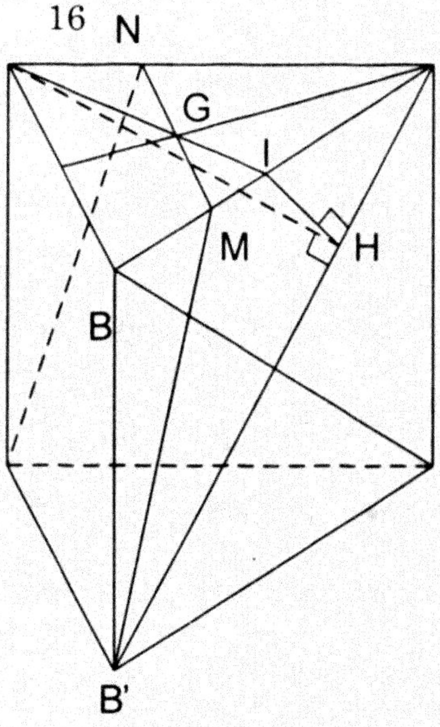
44. 1. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng B'C.

- I là trung điểm của BC, ta có AI $\perp$ (BCC'B')
- Hạ IH $\perp$ B'C thì AH $\perp$ B'C
- d(A,B'C) = AH
- Tam giác AIH vuông tại I cho

$AH^2 = AI^2 + IH^2$

$$= \left(\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad \left(IH = \frac{BC'}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{14d^2}{16}$$

Nên $AH = \dfrac{d\sqrt{14}}{4}$



2. Tính góc giữa A'B và B'C

- Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = d$

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = 0$

$\vec{b}.\vec{c} = |\vec{b}|.|\vec{c}|.\cos 60 = \dfrac{d^2}{2}$

- Ta có $\cos(\widehat{A'B, B'C}) = \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C}})\right|$
- $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$
- $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
- $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{B'C} = (-\vec{a} + \vec{b})(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$

$= \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} - \vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2 + \vec{b}\vec{c}$

$= d^2 - d^2 + \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{d^2}{2}d$

Mà $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{B'C} = \left|\overrightarrow{A'B}\right|.\left|\overrightarrow{B'C}\right|.\cos(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'C}})$

$$= d\sqrt{2}.d\sqrt{2}\cos(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'C}}) = 2d^2\cos(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'C}})$$

Suy ra: $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'C}}\right) = \dfrac{d^2}{2.2d^2} = \dfrac{1}{4}$. Vậy $\cos\left(\widehat{A'B,B'C}\right) = \dfrac{1}{4}$.

3. Tính thể tích của tứ diện A'BB'C

$$V_{(A'BB'C)} = \frac{1}{3}.S_{(BB'C)}.A'I$$

- I là trung điểm của B'C, ta có $A'I \perp (BB'C)$
- $V_{(A'BB'C)} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{d^2}{2}.\dfrac{d\sqrt{3}}{2} = \dfrac{d^3\sqrt{3}}{12}$

4. Tính khoảng cách giữa A'B và B'C

- Do công thức:

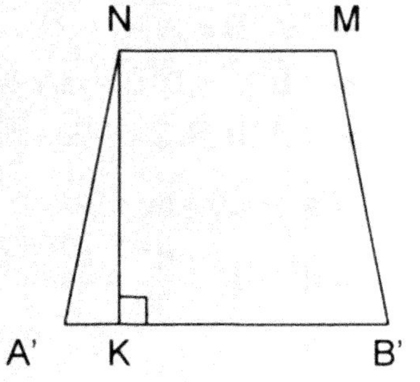
$$V_{(A'BB'C)} = \frac{1}{6}A'B.B'C.\sin\left(\widehat{A'B,B'C}\right).d\left(A'B,B'C\right)$$

- Mà $\cos\left(\widehat{A'B,B'C}\right) = \dfrac{1}{4}$ suy ra: $\sin\left(\widehat{A'B,B'C}\right) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$
- Suy ra: $d\left(A'B,B'C\right) = \dfrac{6.\dfrac{d^3\sqrt{3}}{12}}{d\sqrt{2}.d\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{d\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \dfrac{d\sqrt{5}}{5}$

Vậy khoảng cách giữa A'B và B'C là $\dfrac{d\sqrt{5}}{5}$.

5. Diện tích thiết diện do mặt phẳng (A'B'G) cắt lăng trụ và tỉ số thể tích hai phần của lăng trụ chua bởi (A'B'G).

- G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (A'B'G) cắt BC, CA lần lượt tại M, N ta có : MN qua G và MN // AB, $MN = \dfrac{2d}{3}$
- Thiết diện do (A'B'G) cắt lăng trụ ABC.A'B'C' là hình thang cân A'B'MN có 2 đáy A'B' = d, $MN = \dfrac{2d}{3}$ và hai cạnh bên $A'N = B'M = \dfrac{d\sqrt{10}}{3}$



- $S_{(A'B'MN)} = \dfrac{1}{2}(A'B' + MN).NK$

$NK \perp A'B'$, ta có $A'K = \dfrac{A'B' - MN}{2} = \dfrac{d}{6}$

Nên $NK = \sqrt{\frac{10d^2}{9} - \frac{d^2}{36}} = \frac{d\sqrt{39}}{6}$

- $S_{(A'B'MN)} = \frac{1}{2}\left(d + \frac{2d}{3}\right).\frac{d\sqrt{39}}{6}$
- $S_{(A'B'MN)} = \frac{5d^2\sqrt{39}}{36}$
- Mặt phẳng (A'B'G) chia lăng trụ ra thành hai phần:
  Một phần là khối chóp cụt A'B'C'. MNC có thể tích V_1
  Phần còn lại có thể tích $V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1$

Ta có: $V_1 = \frac{h}{3}\left(\beta + \sqrt{\beta\beta'} + \beta'\right)$; Với $h = cc' = d$; $\beta = S_{(A'B'C)} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$

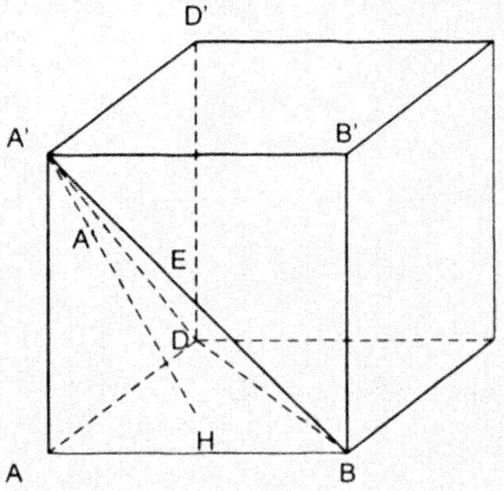
$\beta' = S_{(MNC)} = \frac{4}{9} = \frac{d^2\sqrt{3}}{9}$ nên $V_1 = \frac{d}{3}\left(\frac{d^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{d^2\sqrt{3}}{4}.\frac{d^2\sqrt{3}}{9}} + \frac{d^2\sqrt{3}}{9}\right)$

$V_1 = \frac{19d^3\sqrt{3}}{108}$; $V_2 = V_{(ABC.A'B'C)} - V_1 = \frac{d^3\sqrt{3}}{4} - \frac{19d^3\sqrt{3}}{108} = \frac{8d^3\sqrt{3}}{108}$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{8}$.

45. 1. Tính độ dài các đường chéo AC', BD', CA' và DB' của hình hộp:

- Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$



Thì $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = d$

Và $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{d^2}{2}$

- $A'C = |\overrightarrow{AC'}|$

Mà $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AC'}^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$

$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}$

$= 6d^2$

Nên AC' = $|\overrightarrow{AC'}| = d\sqrt{6}$

- $BD' = |\overrightarrow{BD'}|$. Mà $\overrightarrow{BD'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Nên $\overrightarrow{BD'}^2 = (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}\vec{a} = 2d^2$

Nên BD' = $|\overrightarrow{BD'}| = d\sqrt{2}$

- $CA = |\overrightarrow{CA'}|$;Mà $\overrightarrow{CA} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

  Nên $\overrightarrow{CA'}^2 = (-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c} - 2\vec{a}.\vec{c} = 2d^2$

  Vậy $CA' = d\sqrt{2}$
- $DB' = |\overrightarrow{DB'}|$; Mà $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

  Nên $\overrightarrow{DB}^2 = (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} = 2d^2$

  Vậy $DB = d\sqrt{2}$

2. Tính thể tích V của hình hộp
   - Hạ A'H (ABCD) thì A'H là đường cao của hình hộp ABCD.
   A'B'C'D' mà cũng là đường cao của hình chóp A'ABD
   - $V = S_{(ABCD)}.A'H = 2S_{(ABD)}.A'H$

     $= 6.[\frac{1}{3}.S_{(ABD)}.A'H] = 6.V_{(A'ABD)}$
   - Mà A'ABD là tứ diện đều có cạnh bằng d nên
   $V = \frac{1}{3}.\frac{d^2\sqrt{3}}{4}.\frac{d\sqrt{6}}{3} = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}$ .Vậy $V = \frac{d^3\sqrt{2}}{2}$
3. Tính khoảng cách giữa hai mặt song song của hình hộp:
   - (ABCD) // (A'B'C'D')

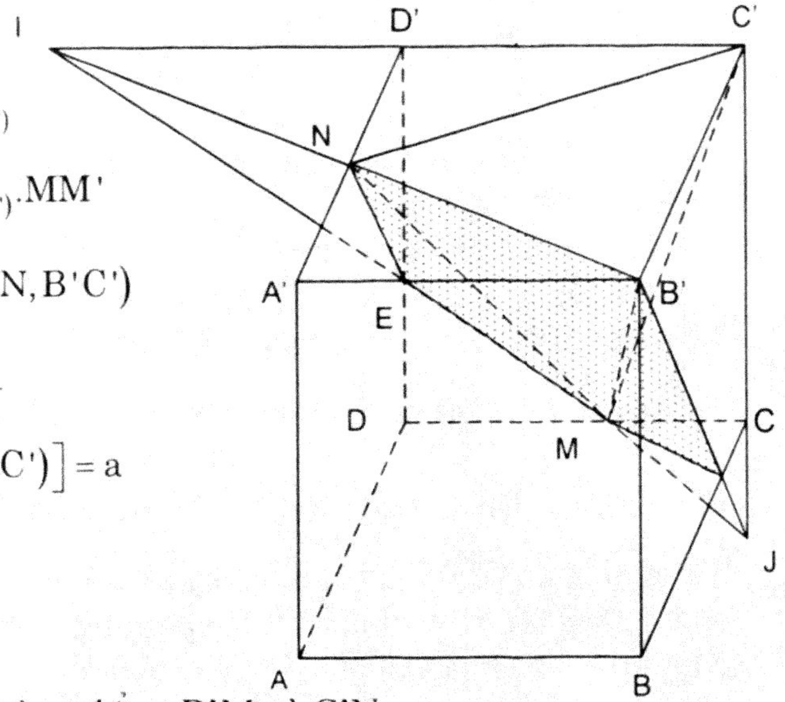
     $d|(ABCD).(A'B'C'D')| = d|A'(ABCD)| = A'H = \frac{d\sqrt{6}}{3}$
   - Do $S_{(ABCD)} = S_{(ADD'A')} = S_{(ABB'A')}$

   Nên từ $V = S_{(ADD'A')}.d\left[(BCC'B').(ADD'A')\right]$

   $= S_{(ABB'A')}.d\left[(CDC'D').(ABB'A')\right]$

   Suy ra khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song trong hình hộp đều bằng $\frac{d\sqrt{6}}{3}$.
4. Tìm hai mặt phẳng cắt hình hộp theo thiết diện là hình vuông
   Do ba đường chéo của hình hộp là: BD' = CA' BD' = $d\sqrt{2}$
   Ta có các hình bình hành BDD'A'.BCD'A' có các cạnh bằng d và có hai đường chéo $d\sqrt{2}$ nên là các hình vuông.
   Vậy hai mặt phẳng (BDD'B'), (BCD'A') cắt hình hộp theo thiết diện là hình vuông

46. 1. Tính thể tích của khối tứ diện



- $V_{(B'MC'N)} = V_{(MB'NC')}$

$$= \frac{1}{3}S_{(B'NC')}.MM'$$

- $S_{(B'NC)} = \frac{1}{2}B'C'.d(N,B'C')$

$$= \frac{1}{2}a.a = \frac{a^2}{2}$$

$MM' = d[M,(B'NC')] = a$

Vậy $V_{(B'MC'N)} = \frac{a^3}{6}$

2. Tính góc giữa hai đường thẳng B'M và C'N

- Coi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một vuông góc và có

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$. Ta có: $\overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = -\vec{c} + \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$

Và $\overrightarrow{C'N} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'N} = -\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$.

$$\overrightarrow{B'M}.\overrightarrow{C'N} = \left(-\vec{c} + \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)\left(-\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right) = \frac{\vec{a}^2}{2} - \frac{\vec{b}^2}{2} = \frac{\vec{a}^2}{2} - \frac{\vec{a}^2}{2} = 0.$$

Nên $\overrightarrow{B'M} \perp \overrightarrow{C'N}$ suy ra $(\widehat{BM, C'N}) = 90$

3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B'M, C'N

- Do công thức thể tích:

$V_{(B'MC'N)} = \frac{1}{6}B'M.C'N\sin\left(\widehat{B'M, C'N}\right).d(B'M, C'N)$ với:

$\overrightarrow{B'M}^2 = \left(-\vec{c} + \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)^2 = \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + \frac{\vec{a}^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$. Nên $B'M = \frac{3a}{2}$

$\overrightarrow{C'N}^2 = \left(-\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right)^2 = \vec{a}^2 + \frac{\vec{b}^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$. Nên $C'N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\sin\left(\widehat{B'M, C'N}\right) = \sin 90 = 1$

Suy ra $d(B'M, C'N) = \dfrac{a^3}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.\dfrac{3a}{2}} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{15}$.

4. Tính tỉ số thể tích hai phần của hình lập phương bị chia cắt bởi mặt phẳng (B'MN)
Để thấy rõ hai phần của hình lập phương bị chia bởi mặt phẳng (B'MN) ta khảo sát thiết diện do (B'MN) cắt hình lập phương.
Kéo dài (B'N) cắt đường thẳng (C'D') tại I, ta có ID' = a.
Đường thẳng (IM) cắt DD' tại E và cắt (CC') tại J ta có $D'R = \dfrac{2a}{3}$

và $DE = CJ = \dfrac{a}{3}$; B'J cắt BC tại K, ta có $CK = \dfrac{a}{4}$.
Thiết diện do (B'MN) cắt hình lập phươnglà ngủ giác MENB'K
Mặt phẳng (B'MN) chia hình lập phương thành hai phần:
Một phần có chứa cạnh CC' có thể tích V_1
Phần còn lại có chứa cạnh AA' có thể tích $V_2 = V_{(ABCD.A'B'C'D')} - V_1$

- $V_1 = V_{(I.B'C'J)} - \left[V_{(I.ND'E)} + V_{(J.MCK)}\right]$
- $V_{(I.B'C'J)} = \dfrac{1}{3}S_{(B'C'J)}.IC = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{4a}{3}.2a = \dfrac{4a^3}{9}$
- $V_{(I.ND'E)} = \dfrac{1}{3}S_{(ND'E)}.ID' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{2}{3}.a.a = \dfrac{a^3}{18}$
- $V_{(J.MCK)} = \dfrac{1}{3}S_{(MCK)}.JC = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3}{144}$
- $V_2 = V_{(ABCD.A'B'C'D')} - V_1 = a^3 - \dfrac{55a^3}{144}; V_2 = \dfrac{89a^3}{144}$;

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{55}{89}$.

Phụ lục GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC

1. *Đề dự bị 1 khối A (2005).*

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(1; 1; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2).

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua gốc tọa độ O và vuông góc với BC. Tìm tọa độ giao điểm của AC với mặt phẳng (P).

b. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

2. *Đề dự bị 1 khối B(2005).*

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{(t là tham số)}$$

a. Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2.

b. Tìm tọa độ các điểm M thuộc d_1 và N thuộc d_2, sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng (P): $x - y + z = 0$ và độ dài đoạn MN = $\sqrt{2}$.

3. *Đề dự bị 2 khối B (2005).*

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm M(5; 2;– 3) và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 1 = 0$.

a. Gọi M_1 là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P). Xác định tọa độ điểm M_1 và tính độ dài đoạn MM_1.

b. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua M và chứa đường thẳng: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-6}$.

4. *Đề dự bị 1 khối D (2005).*

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho lăng trụ đứng $OAB.O_1A_1B_1$ với A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), O_1(0; 0; 4).

a. Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1. Viết phương trình mặt cầu qua bốn điểm O, A, B, O_1.

b. Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với O_1A và cắt OA, OA_1 lần lượt tại N, K. Tính độ dài đoạn KN.

5. *Đề dự bị 2 khối D (2005).*

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), $D_1(0; 2; 2)$.

a. Xác định tọa độ các điểm còn lại của hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) vuông góc nhau.

b. Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ điểm N thuộc đường thẳng AC_1 ($N \neq A$) tới 2 mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

6. *Đề dự bị 1 khối D (2006).*

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mp bên (SBC) bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCS.

7. *Đề dự bị 2 khối D (2006).*

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) đi qua A, K và song song với BD, chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

8. *Đề dự bị 1 khối A(2006).*

Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có cạnh AB = AD = a, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $BAD = 60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D' và A'B'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng BDMN. Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

9. *Đề dự bị 2 khối B(2006).*

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có A'.ABC là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy AB = a, cạnh bên AA' = b. Gọi α là góc giữa hai mp(ABC) và (A'BC). Tính $\tan\alpha$ và thể tích khối chóp A'BB'CC'.

10. *Đề dự bị 1 khối B(2006).*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, SA vuông góc với mp(ABCD), SA = a. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC và song song với BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích của khối chóp S.AB'C'D'.

11. *Đề dự bị 2 khối A(2006).*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng BCM cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM

12. *Đề dự bị 1 khối D – 2006.*

Trong không gian với hệ tọa độ Oxy. Cho mặt phẳng (P): $4x - 3y + 11z - 26 = 0$ và hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3},\ d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{1-3}{2}.$$

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau
2. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P), đồng thời đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

13. *Đề dự bị 2 – Khối B – 2006.*

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho mặt phẳng (P): $2x + y - z + 5 = 0$ và các điểm A(0; 0; 4); B(2; 0; 0)

1. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên mặt phẳng (P)
2. Viết phương trình mặt cầu đi qua O, A, B và tiếp xúc với mp (P).

14. *Đề dự bị 2 Khối D – 2006.*

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho A(1; 2; 0); B(0; 4; 0); C(0; 0; 3)

1. Viết phương trình đường thẳng qua O và vuông góc với mp(ABC)
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa OA, sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

15. *Đề dự bị 1 – khối B – 2006.*

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases} \qquad \Delta_2 : \left\{ \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \right.$$

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2.
2. Xác định điểm A trên Δ_1 và điểm B trên Δ_2 sao cho đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất.

16. *Đề dự bị 2 – Toán khối A – 2006.*

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz.

Cho mặt phẳng (α): $3x + 2y - z + 4 = 0$ và hai điểm A(4; 0; 0); B(0; 4;0).

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB

1. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α)
2. Xác định tọa độ K sao cho KI vuông góc với mặt phẳng (α) đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng(α).

17. *Đề dự bị 1 – Khối A – 2006.*

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có A(0; 0; 0); B(2; 0; 0); C(0; 2; 0); A'(0; 0; 2)

1. Chứng minh A'C vuông góc với BC. Viết phương trình mặt phẳng (ABC')
2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B'C' trên mặt phẳng (ABC').

Hướng dẫn

1. *Đề dự bị khối A (2005).*

a. Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0; -2; 2)$

Mặt phẳng (P) qua O(0; 0; 0) và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là: $0.x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 2)$ phương trình tham số của AC là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Thế vào phương trình mặt phẳng (P), ta có $1 - t - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Thế $t = \dfrac{1}{3}$ vào phương trình của đường thẳng AC ta có $M\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ là giao điểm của đường thẳng AC với mặt phẳng (P).

b. Với A(1; 1; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 - 1 = 0$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.

Ta dễ thấy ΔBOC cũng vuông tại O. Do đó A, O cùng nhìn đoạn BC với một góc vuông, hay A, O nằm trên mặt cầu đường kính BC tâm I là trung điểm của BC. Ta dễ dàng tìm được I(0; 1; 1),

$R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Vậy phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là: $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$.

2. *Đề dự bị 1 khối B (2005).*

a. Đường thẳng d_1 qua O(0; 0; 0), vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 1; 2)$

Đường thẳng d_2 qua B(–1; 0; 1), vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-2; 1; 1)$

$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-1; -5; 3)$, $\quad \overrightarrow{OB} = (-1; 0; 1)$

$\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\overrightarrow{OB} = 1 + 3 = 4 \neq 0 \Leftrightarrow$ hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau.

b. $M \in d_1 \Rightarrow M(t'; t'; 2t')$; $N \in d_2 \Rightarrow N(-1 - 2t;\ t;\ 1 + t)$

$\overrightarrow{MN} = (-2t - t' - 1;\ t - t';\ t - 2t' + 1)$

Vì $MN \parallel (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{n_p} = (1; -1; 1)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_p} = 0 \Leftrightarrow -2t - t' - 1 - t + t' + t - 2t' + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -t'$

$MN = \sqrt{(t' - 1)^2 + 4t'^2 + (1 - 3t')^2} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 14t' - 8t' + 2 = 2 \Leftrightarrow 2t'(7t' - 4) = 0 \Leftrightarrow t' = 0$ hay $t' = \dfrac{4}{7}$

* $t' = 0$ ta có $M(0; 0; 0) \equiv O \in (P)$ (loại)

* $t' = \dfrac{4}{7}$ ta có $M\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{4}{7}; \dfrac{8}{7}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{7}; -\dfrac{4}{7}; \dfrac{3}{7}\right)$.

3. *Đề dự bị 2 khối B.*

Tìm M_1 là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P)

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;\ 2;\ -1)$. Phương trình tham số của đường thẳng MM_1 qua M, và vuông góc với mặt phẳng (P) là:

$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$ Thế vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$2(5 + 2t) + 2(2 + 2t) - (-3 - t) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 18 + 9t = 0 \Leftrightarrow t = -2$. Vậy $MM_1 \cap (P) = M_1(1; -2; -1)$

Do $MM_1 = \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 + 2)^2 + (-3 + 1)^2} = \sqrt{36} = 6$

* Đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{-6}$ đi qua A(1; 1; 5) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;\ 1;\ -6)$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(4;\ 1;\ -8)$

Mặt phẳng (Q) đi qua M, chứa Δ ⇔ mp (Q) qua A có pháp vectơ là $\left[\overrightarrow{AM},\vec{a}\right]=(2;\ 8;\ 2)=2(1;\ 4;\ 1)$ nên phương trình mặt phẳng (Q):

$(x-5)+4(y-2)+(z+3)=0$

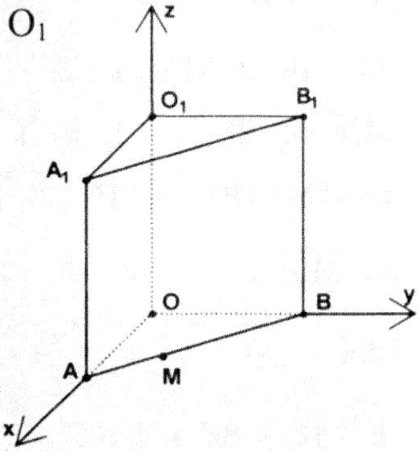
hay phương trình mặt phẳng (Q) là: $x+4y+z-10=0$.

4. *Đề dự bị 1 khối D.*

a. Vì $AA_1 \perp (Oxy) \Rightarrow A_1(2;\ 0;\ 4)$

$BB_1 \perp (Oxy) \Rightarrow B_1(0;\ 4;\ 4)$

Viết phương trình mặt cầu (S) qua O, A, B, O_1



Phương trình mặt cầu (S):

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì $O \in (S) \Rightarrow d=0$

Vì $A \in (S) \Rightarrow 4-4a=0 \Rightarrow a=1$

Vì $B \in (S) \Rightarrow 16-8b=0 \Rightarrow b=2$

Vì $O_1 \in (S) \Rightarrow 16-8c=0 \Rightarrow c=2$

Vậy (S) có tâm I(1; 2; 2)

Ta có $d=a^2+b^2+c^2-R^2 \Rightarrow R^2=1+4+4=9$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$.

b. Tính KN.

Ta có: M(1; 2; 0), $\overrightarrow{O_1A}=(2;\ 0;\ -4)$, mặt phẳng (P) qua M vuông góc với O_1A nên nhận $\overrightarrow{O_1A}$ hay (1; 0; –2) làm pháp vectơ ⇒ phương trình mặt phẳng (P) là: $1(x-1)+0(y-2)-2(z-0)=0$

hay phương trình mặt phẳng (P) là: $x-2z-1=0$

Phương trình tham số của đường thẳng OA là: $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

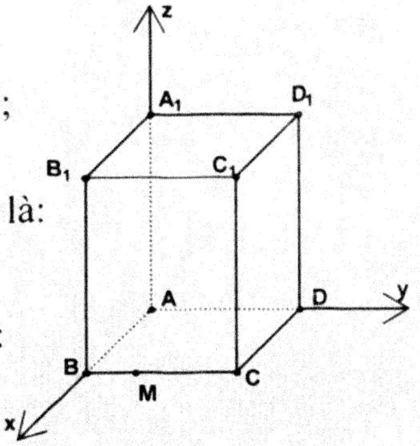
Thế vào phương trình mặt phẳng (P): $t-1=0 \Rightarrow t=1$

$\Rightarrow$ OA cắt mặt phẳng (P) tại N(1; 0; 0), phương trình tham số của đường thẳng OA_1 là: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$ với $\overrightarrow{OA_1} = (2;\ 0;\ 4) = 2(1;\ 0;\ 2)$ là vectơ chỉ phương. Thế vào phương trình mặt phẳng (P): $t - 4t - 1 = 0$

$\Rightarrow t = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow OA_1$ cắt mặt phẳng (P) tại $K = \left(-\dfrac{1}{3}, 0, -\dfrac{2}{3}\right)$

Vậy $KN = \sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + (0-0)^2 + \left(0 + \dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{20}{9}} = \dfrac{\sqrt{20}}{3} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

5. *Đề dự bị 2 khối D.*



a. Ta có: A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(2; 2; 0),

$D(0; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 2)$, $B_1(2; 0; 2)$, $C_1(2; 2; 2)$;

$D_1(0 ; 2; 2)$

Mặt phẳng (AB_1D_1) có cặp vectơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{AB_1} = (2;\ 0;\ 2)$ $\overrightarrow{AD_1} = (0;\ 2;\ 2)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (AB_1D_1) có một pháp vectơ là :

$\vec{u} = \dfrac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB_1},\ \overrightarrow{AD_1}\right] = (-1;\ -1;\ 1)$

mặt phẳng (AMB_1) có cặp vectơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{AM} = (2;\ 1;\ 0)$; $\overrightarrow{AB_1} = (2;\ 0;\ 2)$ với $M(2; 1; 0) \Rightarrow$ mặt phẳng (AMB_1)

có pháp vectơ là $\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = (1;\ -2;\ -1)$ Ta có:

$\vec{u}.\vec{v} = -1(1) - 1(-2) + 1(-1) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow (AB_1D_1) \perp (AMB_1)$.

b. $\overrightarrow{AC_1} = (2;\ 2;\ 2) \Rightarrow$ phương trình tham số của AC_1: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

do $N \in AC_1 \Rightarrow N(t ; t ; t)$, phương trình mặt phẳng (AB_1D_1):

$-(x - 0) - (y - 0) + (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$

$\Rightarrow d(N, (AB_1D_1)) = \dfrac{|t + t - t|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|t|}{\sqrt{3}} = d_1$.

Phương trình mặt phẳng (AMB_1):

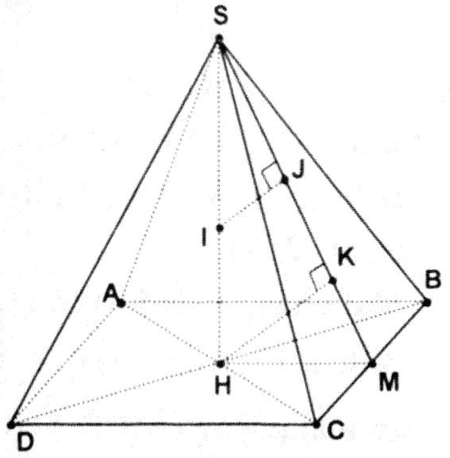
$(x - 0) - 2(y - 0) - (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z = 0$

$$\Rightarrow d(N, (AMB_1)) = \frac{|t - 2t - t|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-2t|}{\sqrt{6}} = d_2$$

$$\Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{|t|}{\sqrt{3}}}{\frac{2|t|}{\sqrt{6}}} = \frac{|t|}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{6}}{2|t|} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tỉ số khoảng cách từ $N \in AC_1$ ($N \neq A \Leftrightarrow t \neq 0$) tới 2 mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

6. Tính $V_{S.ABCD}$



Vì S.ABCD là hình chóp đều ⇒ H là tâm của ABCD. Gọi M là trung điểm của BC và K là hình chiếu vuông góc của H lên SM. Ta có:

$$\left.\begin{matrix} BC \perp SH \\ BC \perp HM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SHM)$$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SHM)$

Mà $HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = 2IJ = 2b$

Trong tam giác vuông AHM ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{4}{a^2}$$

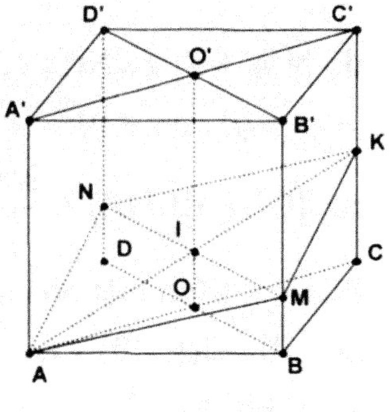
$$\Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}. V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.dt(ABCD) = \frac{2}{3}\frac{a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}.$$

7. Thể tích khối đa diện:

Gọi O, O' lần lượt là tâm của ABCD, A'B'C'D'

I là giao điểm của AK với OO'

$$\Rightarrow OI = \frac{CK}{2} = \frac{a}{3}$$



Mặt phẳng (α) chứa AK // BD nên (α) qua I và cắt mp(BDB'D') theo giao tuyến MN // BD

$$\Rightarrow BM = DN = OI = \frac{a}{3}.$$

Đáy ABCD là hình vuông

$\Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow AK \perp MN$

I là trung điểm của MN và của AK nên thiết diện AMKN là hình thoi. Mặt phẳng (α) cắt hình lập phương thành hai khối. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện ABCDMNK, V_2 là thể tích khối đa diện AMKNA'B'C'D'.$V = a^3$ là thể tích của khối tứ diện ABCD thì $V = a^3 = V_1 + V_2$. Ta có: $V_1 = 2V_{ABCKM}$

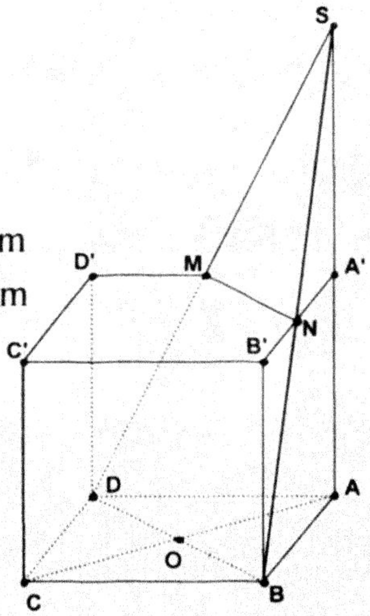
Mà $2V_{ABCKM} = \frac{1}{3}AB.S_{BCMK} = \frac{1}{3}a\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}\right)\frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$

$\Rightarrow V_1 = \frac{2a^3}{6} = \frac{a^3}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{2a^3}{3}$.

8. Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

S là điểm đối xứng của A qua A'.

Khi đó S, M, D thẳng hàng và M là trung điểm của SD; S, N, B thẳng hàng và N là trung điểm của SB. ΔBAD có $AB = AD = a$



$\widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta BAD$ đều

$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$AC = 2AO = a\sqrt{3} = SA$

$CC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = AO$. Hai tam giác vuông SAO và ACC' bằng nhau.

$\Rightarrow \widehat{ASO} = \widehat{CAC'} \Rightarrow AC' \perp SO$ (1). Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp AA'$

$\Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$ (2) Từ (1) và (2) suy ra

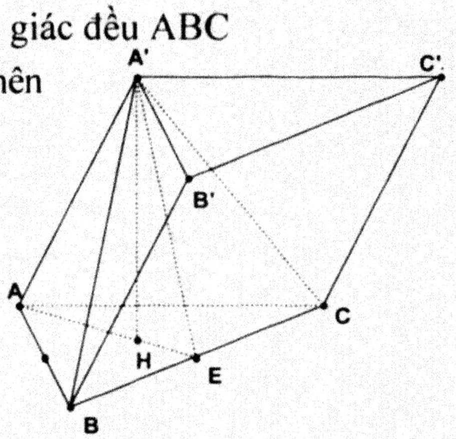
$AC' \perp (BDMN)$. Do đó: $V_{ABDMN} = \frac{3}{4}V_{SABD}$ (vì $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{4}S_{\Delta SBD}$)

$$= \frac{3}{4}.\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABD} = \frac{1}{4}a\sqrt{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{16}$$

9. Gọi E là trung điểm cạnh BC; H là tâm tam giác đều ABC

Do A'ABC là chóp tam giác đều nên $(\widehat{ABC, A'BC}) = \widehat{A'EH}$

Ta có: $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



$HE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

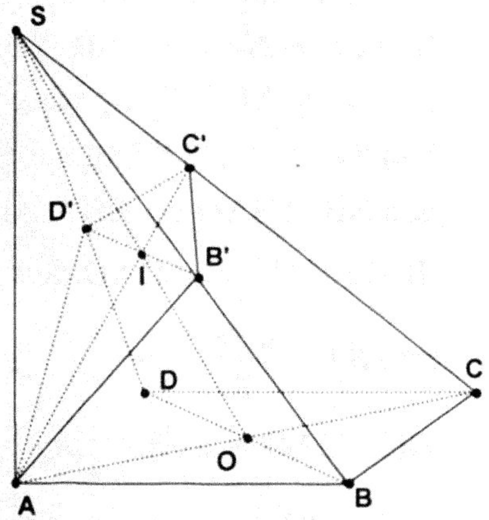
$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}$

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{A'H}{HE} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AE = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $V_{A'BB'C'C} = V_{ABCA'B'C'} - V_{A'ABC}$

$= A'H.S_{ABC} - \frac{1}{3}A'H.S_{ABC} = \frac{2}{3}A'H.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$

10. Hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^\circ$



Nên ΔBAD đều có cạnh là a

$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

$\Rightarrow SC = 2a$.

Trong ΔSAC vuông ở A, trung tuyến

$AC' = \frac{SC}{2} = a \Rightarrow \Delta SAC'$ đều cạnh a.

Gọi O là giao điểm của AC với BD

I là giao điểm của AC' và B'D'.

Ta có: I là trọng tâm ΔSAC (vì là giao điểm của 2 trung tuyến SO và AC')$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a$. Ta có: $B'D' \perp AC'$

(vì B'D' // BD) nên $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC'.B'D' = \frac{a^2}{3}$

Đường cao h của khối chóp S.AB'C'D' chính là đường cao SH của $\Delta SAC'$ vì $SH \perp AC'$, $SH \perp B'D'$. Chú ý rằng $\Delta SAC'$ đều cạnh a nên $h = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V_{SAB'C'D'} = \frac{1}{3}h.S_{AB'C'D'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

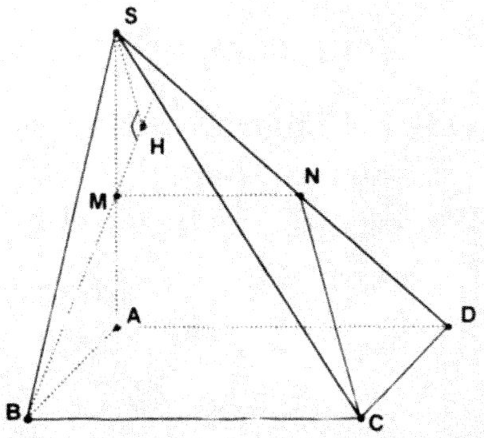
11. Tính thể tích hình chóp S.BCNM

(BCM) // AD nên nó cắt (SAD) theo giao tuyến MN // AD

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp BM$

Tứ giác BCNM là hình thang vuông có BM là đường cao

Ta có: $SA = AB.\tan 60^o = a\sqrt{3}$



$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{4a}{3};\ BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Diện tích hình thang BCNM là:

$$S = \left(\frac{2a + \frac{4a}{3}}{2}\right)\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}.$$

$V_{SBCNM} = \frac{1}{3}SH.dt(BCNM)$. Hạ $SH \perp BM$.

Ta có: $SH \perp BM$. Và $BC \perp (SAB) \equiv (SBM)$

$\Rightarrow BC \perp SH$. Vậy $SH \perp (BMNC) \Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp S.BCNM . Trong tam giác SBA ta có:

$$SB = \frac{AB}{\cos 60^o} = 2a \Rightarrow \frac{AB}{SB} = \frac{AM}{MS} = \frac{1}{2}$$

Vậy BM là phân giác của góc $\widehat{SBH} \Rightarrow \widehat{SBH} = 30^o$

$$\Rightarrow SH = SB.\sin 30^o = 2a.\frac{1}{2} = a.\ V = \frac{1}{3}a.\frac{10a^2}{3\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}a^2}{27}.$$

12.1. Ta có: d_1 qua M (0; 3; −1) vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1;2;3)$

d_2 qua N (4; 0; 3) vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1;1;2)$

$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = (1,5,-3), = (4;-3;4);\ \left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{MN} = 4 - 15 - 12 = -23 \neq 0$

$\Rightarrow d_1, d_2$ chéo nhau.

2. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 nên Δ đi qua các giao điểm của d_1, d_2 với (P).

$$A\begin{cases}\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}\\ 4x-3y+11z-26=0\end{cases} \Rightarrow A(-2;\ 7;\ 5)$$

$$B\begin{cases}\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{2}\\ 4x-3y+11z-26=0\end{cases} \Rightarrow B(3;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(5;-8;-4)$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ qua A, B là: $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-7}{-8}=\dfrac{z-5}{-4}$

13. 1. Hình chiếu vuông góc A'B' của AB lên mặt phẳng (P) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và (Q), trong đó (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (P). Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;0;-4)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;1;-1)$ $\Rightarrow$ mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AB}\right]=(-4;6;-2)=-2(2;-3;1)$.

Vậy mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'_Q}=(2;-3;1)$

$\Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (Q) là: $2(x-0)-3(y-0)+1(z-4)=0$
$\Leftrightarrow 2x-3y+z-4=0$. Vậy phương trình hình chiếu của A'B' là:

2. Gọi I(a; b; c) là tâm mặt cầu (S)

(S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$;

(S) đi qua O, A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) nên ta có: $\begin{cases}d=0\\16-8c+d=0\\4-4a+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=0\\a=1\\c=2\end{cases}$

Ta lại có mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow$ d(I, P) = R = OI

$|2a+b-c+5|=\sqrt{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Thay a =1, c = 2 vào ta có:

$|b+5|=\sqrt{6}\sqrt{b^2+5} \Leftrightarrow b=1$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z=0$.

14. 1. Viết phương trình đường thẳng Δ qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Ta có:

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1;\ 2;\ 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1;\ -2;\ 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}.AC\right] = (6;\ 3;\ 4)$ là 1 vectơ chỉ phương của (Δ). Vậy phương trình của đường thẳng Δ là: $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa OA sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P)

Gọi phương trình mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ với

$A^2 + B^2 + C^2 > 0$; $O \in (P) \Rightarrow D = 0$; $A \in$ mặt phẳng (P)

$\Rightarrow A + 2B = 0 \Rightarrow A = -2B$.

$d(B, P) = d(C, P) \Rightarrow |4B + D| = |3C + D| \Rightarrow 4B = \pm 3C$ (Do $D = 0$)

- Với $4B = 3C$ chọn $C = 3$, $A = -6 \Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (P) là: $-6x + 3y + 4z = 0$
- Với $4B = -3C$ chọn $C = -4 \Rightarrow B = 3$, $A = 6 \Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (P) là: $6x + 3y - 4z = 0$

15. 1. Δ_1 đi qua $M_1(1;-1;\ 2)$ vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;-1;0)$

Δ_2 đi qua $M_2(3;\ 1;\ 0)$ vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-1;\ 2;\ 1)$

Mặt phẳng (P) cần tìm chứa Δ_1 và song song Δ_2 nên mặt phẳng (P) qua M_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-1;-1;\ 1)$

Do đó phương trình của mặt phẳng (P) là:

$-(x-1) - (y+1) + (z+2) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$

2. AB ngắn nhất $\Leftrightarrow AB \perp (\Delta_1, \Delta_2)$

$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ $\qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$

$A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1 + t;\ -1 - t;\ 2)$; $B(3 - t';\ 1 + 2t;\ t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2 - t';\ 2 + 2t' + t;\ t' - 2)$

Vì $AB \perp (\Delta_1, \Delta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3t' = 0 \\ 3t + 6t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0$

$\Rightarrow A(1;\ -1;\ 2)$, $B(3;\ 1;\ 0)$.

16. 1. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α)

Phương trình của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x + y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 4 \\ z = 0 \\ 3x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 16 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-12; 16; 0)$

2. Vì I là trung điểm AB $\Rightarrow$ I (2; 2; 0). Gọi K(x; y; z).

$\overrightarrow{KI}$ cùng phương $\vec{n}_{(\alpha)}$ và OK = d (K, (α))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{1}{-1} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{|2x + 2y - z + 4|}{\sqrt{14}} \end{cases} \Leftrightarrow K\left(\frac{-1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

17. 1. Chứng minh: A'C vuông góc với BC. Viết phương trình mặt phẳng (ABC')

Ta có:

$\overrightarrow{A'C} = (0;\ 2;\ -2), \overrightarrow{BC'} = (-2;\ 2;\ 2);\ \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BC'}$
$= 0.(-2) + 2.(2) - 2(2) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{BC'} \Rightarrow A'C \perp (ABC')$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} = (0;\ 2; -2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC')

$\Rightarrow$ pt(ABC'): $0.(x - 0) + 2(y - 0) - 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow y - z = 0.$

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B'C' trên mặt phẳng (ABC')

Ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = (-2; 2; 0)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa B'C' và vuông góc với mặt phẳng (ABC'). Khi đó hình chiếu vuông góc của B'C' lên mặt phẳng (ABC') là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABC'), mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{A'C}\right] = (-4; -4; -4) = 4(1;1;1)$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (α): $1(x - 0) + 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + y + z - 4 = 0.$

Vậy phương trình hình chiếu B'C' lên mặt phẳng (ABC') là:

$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

MỤC LỤC

Chương I: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. Khái niệm về khối đa diện 5

§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của cac khối đa diện 5

§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện.
các khối đa diện đều 23

§4. Thể tích của khối đa diện 26

Ôn tập chương I 40

Đề kiểm tra cuối chương 55

Chương II: MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. MẶT CẦU 60

§2. Mặt trụ, hình trụ và khốii trụ 78

§3. Mặt nón, hình nón và khối nón 96

§4. Khái niệm về mặt tròn xoay 104

Đề kiểm tra 127

Chương III: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ tọa độ trong không gian 132

§2. Phương trình mặt phẳng 166

§3. Phương trình đường thẳng 197

Ôn tập chương 233

ÔN TẬP CUỐI NĂM 266

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập nội dung
HẢI ĐĂNG
Sửa bài
NGUYÊN HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

PHÂN DẠNG & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TL - TN HÌNH HỌC 12
Mã số: 1L-175ĐH2008
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ti TNHH in Bao bì Hưng Phú.
Số xuất bản: 293-2008/CXB/55-54ĐHQG HN, ngày 08/04/2008
Quyết định xuất bản số: 175LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2008.